Klausur: Regelungs- und Systemtechnik 2

Helmholtz-Hörsaal

Freitag, den 17. 03. 2023

Beginn: 08.00 Uhr

Bearbeitungszeit: 120 Minuten

Modalitäten

- Als Hilfsmittel sind **nur** handschriftliche Aufzeichnungen sowie Kopien der Vorlesungs- und Übungsunterlagen sowie Übungsklausuren zugelassen.
- Bitte schreiben Sie mit dokumentenechtem Schreibgerät (Tinte oder Kugelschreiber).
- Zur Lösung der Aufgaben ist der freie Platz nach den jeweiligen Aufgaben vorgesehen; bei Bedarf werden Ihnen Zusatzblätter ausgehändigt.
- Für alle Berechnungen sind die **Lösungswege** darzustellen. Die alleinige Angabe eines Ergebnisses wird als Lösung nicht bewertet.

Name: ______________________

Matr.-Nr.: ______________________

Studiengang: ______________________

Aufgabe	1	2	3	4		Σ
max. Punkte	16	14	21	15		66
erreichte Punkte						
					Note	

Aufgabe 1

16 Punkte

Gegeben sei das freie System

$$\dot{x}(t) = Ax(t), \qquad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

a) Bestimmen Sie die Lösung $x = x(t)$ für $t \geq 0$ zum Anfangszustand $x(0) = x_0$.

Betrachten Sie nun das System

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + b_1 u(t) + b_2\, d(t), \qquad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \qquad b_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \qquad b_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

mit dem Regelgesetz $u(t) = \begin{pmatrix} -1 & -1 \end{pmatrix} x(t)$ und der Störung $d(t)$.

b) Sei zunächst $d \equiv 0$. Geben Sie die Dynamikmatrix $\bar{A}$ des geschlossenen Regelkreises an und bestimmen Sie die Transitionsmatrix $\bar{\Phi}(t, t_0)$.

Hinweis: Wenn Sie b) nicht lösen können, nutzen Sie ab hier $\bar{\Phi}(t, t_0) = \begin{pmatrix} 0 & e^{-(t-t_0)} \\ e^{-(t-t_0)} & 0 \end{pmatrix}$.

c) Die Störung d sei stückweise gegeben als

$$d(t) = \begin{cases} e^{t_1 - t} & \text{für } \; t_0 \leq t \leq t_1, \\ 1 & \text{für } \; t > t_1 \end{cases}$$

mit Konstanten $t_1 > t_0$. Bestimmen Sie die Lösung $x = x(t)$ im geschlossenen Regelkreis mit Störung $d(t)$ und Anfangswert $x(t_0) = x_0$, d.h. stückweise für $t_0 \leq t \leq t_1$ und $t_1 < t$.

d) Geben Sie den stationären Endwert $\lim_{t\to\infty} x(t)$ des geschlossenen Regelkreises mit Störung aus Aufgabe c) an.

Aufgabe 2

14 Punkte

Betrachten Sie das Modell eines inversen Pendels mit Aktordynamik, das an der oberen Ruhelage linearisiert wurde. Die Dynamik lässt sich beschreiben durch

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 10 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & -10 \end{pmatrix}}_{=A} x(t) + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{=B} u(t) \\ y(t) &= \underbrace{\begin{pmatrix} 10 & 1 & 0 \end{pmatrix}}_{=C} x(t)\end{aligned}$$

mit Zustand $x(t) \in \mathbb{R}^3$, Eingang $u(t) \in \mathbb{R}$ und Ausgang $y(t) \in \mathbb{R}$.

a) Ist das System (asymptotisch) stabil?

b) Ist das System steuerbar?

c) Zeigen Sie nun, dass es mindestens einen nicht-beobachtbaren, aber stabilen Eigenwert λ gibt. Das heißt, finden Sie ein λ für das gilt: Rang $\begin{pmatrix} \lambda I - A \\ C \end{pmatrix} < 3$.

Das System soll mit einer dynamischen Ausgangsrückführung der Form

$$\begin{aligned}\dot{\hat{x}}(t) &= A\hat{x}(t) + Bu(t) + l(\hat{y}(t) - y(t)) \\ \hat{y}(t) &= C\hat{x}(t) \\ u(t) &= k^\top \hat{x}(t)\end{aligned}$$

mit $k^\top = \begin{pmatrix} 1 & 13 & 10 \end{pmatrix}$ und $l^\top = \begin{pmatrix} -1 & -7 & 0 \end{pmatrix}$ geregelt werden.

d) Stellen Sie das System im geschlossenen Regelkreis mittels $e = \hat{x} - x$ im Zustand $\begin{pmatrix} e \\ x \end{pmatrix}$ auf. Nutzen Sie für die Darstellung neben dem Zustand die Variablen A, B, C, k und l .

e) Ist das System im geschlossenen Regelkreis asymptotisch stabil?
Hinweis: $(\lambda + a)^3 = \lambda^3 + 3a\lambda^2 + 3a^2\lambda + a^3$

Aufgabe 3

21 Punkte

Gegeben ist das zeitkontinuierliche System Σ mit einem Parameter $p \in \mathbb{R}$

$$\Sigma : \begin{cases} \dot{x}(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} x(t) + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} u(t) \\ y(t) = \begin{pmatrix} p & 2 \end{pmatrix} x(t). \end{cases}$$

Das System soll mit einer Zustandsrückführung mit integralem Anteil gemäß

$$u(t) = k^\top x(t) + K_\mathrm{I} \underbrace{\int_0^t (r(\tau) - y(\tau))\mathrm{d}\tau}_{=x_\mathrm{I}(t)}$$

geregelt werden.

a) Geben Sie die Systemdarstellung von Σ bzgl. des erweiterten Zustands $\bar{x} = \begin{pmatrix} x \\ x_\mathrm{I} \end{pmatrix}$ an.

b) Für welche Werte p ist das erweiterte System bezüglich des Eingangs u steuerbar?

c) Geben Sie die Systemdarstellung des geschlossenen Regelkreises an.

d) Berechnen Sie die Reglerparameter $k^\top$ und K_I so, dass die Dynamikmatrix im geschlossenen Regelkreis Eigenwerte ausschließlich bei $\lambda = -1$ aufweist.

Sei nun $p = 0$ und die Reglerparameter wie folgt gewählt: $k^\top = \begin{pmatrix} 1 & -1 \end{pmatrix}$ und $K_\mathrm{I} = 1$.

e) Untersuchen Sie die Stabilität der Ruhelage im geschlossenen Regelkreis.

f) Bestimmen Sie die Übertragungsfunktion des geschlossenen Regelkreises $G(s) = \frac{Y(s)}{R(s)}$, wobei $Y(s) \bullet\!\!-\!\!\circ\, y(t)$ und $R(s) \bullet\!\!-\!\!\circ\, r(t)$.

g) Bestimmen Sie für die konstante Referenz $r(t) = 1$ den Grenzwert des Ausgangs $y(t)$ und der Stellgröße $u(t)$ für $t \to \infty$.

Ein äußerer Regelkreis wird nun mit Hilfe des neuen Eingangs r gebildet, d.h.

$$r(t) = k_r^\top \begin{pmatrix} x(t) \\ x_\mathrm{I}(t) \end{pmatrix}.$$

h) Können die Eigenwerte mit Hilfe der äußeren Rückführung beliebig platziert werden?

Aufgabe 4

15 Punkte

Gegeben ist das durchgriffsfreie System

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -4 & -3 \end{pmatrix} x(t) + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} u(t) \\ y(t) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} x(t)\,. \end{aligned}$$

a) Bestimmen Sie den Relativgrad des Ausgangs y des Systems. Existiert eine interne Dynamik?

b) Entwerfen Sie bzgl. einer zweifach stetig differenzierbaren Solltrajektorie $y^\star = y^\star(t)$ eine Folgeregelung so, daß der Folgefehler $e(t) = y(t) - y^\star(t)$ asymptotisch stabil zu null geregelt wird. Bestimmen Sie die Eigenwerte der Folgefehlerdynamik in Abhängigkeit der Reglerparameter.

c) Drücken Sie $\ddot{y}$ in Termen von $\dot{y}$, y sowie dem Eingang u aus und untersuchen Sie daran die Stabilität des freien Systems ($u \equiv 0$).

d) Finden Sie damit für u abhängig von $y^\star$, aber unabhängig von $\ddot{y}$, $\dot{y}$ und y eine Vorsteuerung $u = u^\star(t)$, so dass y asymptotisch stabil zu $y^\star$ konvergiert.

e) Vergleichen Sie qualitativ das Konvergenzverhalten im geschlossenen Regelkreis des Entwurfs aus Teilaufgabe b) mit dem aus Teilaufgabe d).