Klausur: Regelungs- und Systemtechnik 2

Seminarraum HU 129

Donnerstag, den 29. 09. 2011

Beginn: 9.00 Uhr

Bearbeitungszeit: 90 Minuten

Modalitäten

- Als Hilfsmittel sind **nur** handschriftliche Aufzeichnungen zugelassen.
- Bitte schreiben Sie mit dokumentenechtem Schreibgerät (Tinte oder Kugelschreiber).
- Zur Lösung der Aufgaben ist der freie Platz nach den jeweiligen Aufgaben vorgesehen; bei Bedarf werden Ihnen weitere Lösungsblätter ausgehändigt.
- Für alle Berechnungen sind die **Lösungswege** darzustellen. Die alleinige Angabe eines Ergebnisses wird als Lösung nicht bewertet.

Name: ______________________

Matr.-Nr.: ______________________

Studiengang: ______________________

Aufgabe	1	2	3	4		Σ
max. Punkte	8	8	13	7		36
erreichte Punkte						
					Note	

Aufgabe 1

8 Punkte

Gegeben ist eine vereinfachte Zustandsgleichung eines hydraulischen Systems gemäß

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= u(t) - \sqrt{x_1(t) - x_2(t)} \\ \dot{x}_2(t) &= \sqrt{x_1(t) - x_2(t)} - 2\sqrt{x_2(t)} \end{aligned}$$

mit Zustandsvektor $x(t) \in \mathbb{R}^2$ und skalarem Eingang $u(t) \in \mathbb{R}$.

a) Ermitteln Sie denjenigen stationären Betriebspunkt $(\tilde{x}, \tilde{u})$ mit $\tilde{x} = (\tilde{x}_1, \tilde{x}_2)^{\mathrm{T}}$, der zu einem stationären Wert von $\tilde{x}_2 = 1$ gehört.

b) Bestimmen Sie die Systemmatrizen A und B des am Betriebspunkt $(\tilde{x}, \tilde{u})$ linearisierten Systems

$$\frac{d}{dt}\Delta x(t) = A\,\Delta x(t) + B\,\Delta u(t)$$

mit den Abweichungsgrößen $\Delta x(t) := x(t) - \tilde{x}$ und $\Delta u(t) := u(t) - \tilde{u}$.

c) Ist das an diesem Betriebspunkt linearisierte System steuerbar?

d) Ist das freie ($\Delta u \equiv 0$), an diesem Betriebspunkt linearisierte System asymptotisch stabil?

Aufgabe 2 **8 Punkte**

Die Eigenschaften des linearen Systems

$$\dot{x}(t) = \begin{pmatrix} 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} x(t) + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & c \end{pmatrix} u(t)$$

$$y(t) = \begin{pmatrix} d & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} x(t)$$

sollen in Abhängigkeit der Parameter untersucht werden.

Für welche Zahlen $a, b, c, d \in \mathbb{R} \ldots$

a) … ist das freie System, d.h. für $u \equiv 0$, asymptotisch stabil bzw. instabil?

b) … ist das System beobachtbar?

Aufgabe 3

13 Punkte

Gegeben sind die folgenden dynamischen Systeme zweiter Ordnung

$$\Sigma: \; \dot{x}(t) = A\,x(t) \qquad \text{und} \qquad \overline{\Sigma}: \; \dot{\bar{x}}(t) = \bar{A}\,\bar{x}(t)$$

mit den Systemmatrizen

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad \bar{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}.$$

Wir betrachten die zeitliche Entwicklung der Lösung von Σ bzw. $\overline{\Sigma}$ für Zeiten $t \geq 0$.

a) Ermitteln Sie die Eigenwerte der Matrizen A und $\bar{A}$ und beurteilen Sie die Stabilität der Systeme Σ und $\overline{\Sigma}$.

b) Bestimmen Sie die Lösung $x(t) = (x_1(t),\, x_2(t))^{\mathrm{T}}$ des Systems Σ in Abhängigkeit des (reellen) Anfangswerts $x(0) = (x_{10},\, x_{20})^{\mathrm{T}}$.

c) Bestimmen Sie die Lösung $\bar{x}(t) = (\bar{x}_1(t),\, \bar{x}_2(t))^{\mathrm{T}}$ des Systems $\overline{\Sigma}$ in Abhängigkeit des (reellen) Anfangswerts $\bar{x}(0) = (x_{10},\, x_{20})^{\mathrm{T}}$.

d) Betrachten Sie nun den Lösungsanteil $\bar{x}_1(t)$ von Teilaufgabe c). Für welche Anfangswerte x_{10} und x_{20} weist $\bar{x}_1$ ein Extremum im offenen Zeitintervall $]0, \infty[$ auf?

e) Skizzieren Sie den prinzipiellen zeitlichen Verlauf der Lösungen $x_1(t)$ und $\bar{x}_1(t)$ für identische Anfangswerte $x(0) = \bar{x}(0) = (1,\, 1)^{\mathrm{T}}$. Welcher grundlegende Unterschied zeigt sich bei den Verläufen?

Aufgabe 4

7 Punkte

Man betrachte das vereinfachte Modell eines auf einer horizontalen Ebene mit hoher Geschwindigkeit $x = x(t) > 0$ fahrenden Fahrzeugs

$$\dot{x}(t) = -2\,\frac{d\,r}{m}\,x(t) + u(t)\,.$$

Dabei ist $r > 0$ die Sollgeschwindigkeit, $m > 0$ die Fahrzeugmasse, $d > 0$ ein Reibungskoeffizient und u eine vom Fahrer vorgebbare äußere Kraft. Die Geschwindigkeit x werde gemessen, d.h. $y = x$.

Zur asymptotischen Stabilisierung des Sollwerts $y = r =$ konst. (Tempomat) soll ein Zustandsregler mit PI-Ausgangsrückführung gemäß

$$u(t) = \bar{K}\,x(t) + K_\mathrm{P}(r - y(t)) + K_\mathrm{I}\int\limits_0^t (r - y(\tau))\,d\tau$$

mit Integriererzustand $x_\mathrm{I}(t) := \int_0^t (r - y(\tau))\,d\tau$ verwendet werden.

a) Bestimmen Sie die Zustandsdarstellung des um den Integrierzustand x_I erweiterten Systems.

b) Ermitteln Sie mit Hilfe der Formel von Ackermann Reglerkoeffizienten eines Zustandsreglers der Form $u(t) = k_1\,x(t) + k_2\,x_\mathrm{I}(t)$, welche dem geschlossenen Regelkreis im erweiterten System das charakteristische Polynom $p(\lambda) = (\lambda + 1)^2$ verleihen.

c) Berechnen Sie die Koeffizienten $\bar{K}$, K_P, K_I des Zustandsreglers mit PI-Ausgangsrückführung.