Klausur: Regelungs- und Systemtechnik 2

Humboldtbau Raum 117
Donnerstag, den 28. 09. 2012
Beginn: 9.30 Uhr
Bearbeitungszeit: 120 Minuten

Modalitäten

- Als Hilfsmittel sind **nur** handschriftliche Aufzeichnungen zugelassen.
- Bitte schreiben Sie mit dokumentenechtem Schreibgerät (Tinte oder Kugelschreiber).
- Zur Lösung der Aufgaben ist der freie Platz nach den jeweiligen Aufgaben vorgesehen; bei Bedarf werden Ihnen weitere Lösungsblätter ausgehändigt.
- Für alle Berechnungen sind die **Lösungswege** darzustellen. Die alleinige Angabe eines Ergebnisses wird als Lösung nicht bewertet.

Name: ______________________

Matr.-Nr.: ______________________

Studiengang: ______________________

Aufgabe	1	2	3	4		Σ
max. Punkte	21	15	15	9		60
erreichte Punkte						
					Note	

Aufgabe 1

21 Punkte

Gegeben ist das folgende nichtlineare System

$$\begin{aligned}\dot{x}_1(t) &= 1 - \exp\left(\frac{u_2(t)}{x_1(t)}\right) + u_1(t)\\ \dot{x}_2(t) &= x_1(t) - x_2(t)\end{aligned}$$

mit Zustandsvektor $x(t) \in \mathbb{R}^2$ und Eingang $u(t) \in \mathbb{R}^2$. Für alle $t \in \mathbb{R}$ gelte $x_1(t) \neq 0$.

a) Ermitteln Sie alle stationären Zustände $\tilde{x}^{\mathrm{T}} = (\tilde{x}_1, \tilde{x}_2)$ in Abhängigkeit des konstanten Eingangs $\tilde{u}^{\mathrm{T}} = (\tilde{u}_1, \tilde{u}_2)$. Sind die Größen $\tilde{x}_1$ und $\tilde{x}_2$ mittels $\tilde{u}$ unabhängig voneinander vorgebbar?

b) Zeigen Sie, daß die Wahl $(\tilde{x}, \tilde{u})$ mit $\tilde{x}^{\mathrm{T}} = (1,\ 1)$ und $\tilde{u}^{\mathrm{T}} = (0,\ 0)$ ein stationärer Betriebspunkt ist. Bestimmen Sie die Systemmatrizen A und B des an diesem Betriebspunkt linearisierten Systems

$$\frac{d}{dt}\Delta x(t) = A\,\Delta x(t) + B\,\Delta u(t)$$

mit den Abweichungsgrößen $\Delta x(t) := x(t) - \tilde{x}$ und $\Delta u(t) := u(t) - \tilde{u}$.

c) Ist das linearisierte freie System ($\Delta u \equiv 0$) stabil, instabil oder asymptotisch stabil?

d) Ist das linearisierte System steuerbar?

e) Sei $y(t) = c^{\mathrm{T}}\,\Delta x(t)$ Ausgang des linearisierten Systems. Bestimmen Sie alle möglichen von null verschiedenen Vektoren $c \in \mathbb{R}^2$ so, daß das linearisierte System beobachtbar ist.

Zur Schätzung von $\Delta x_1(t)$ soll ein Beobachter für das linearisierte System auf Basis der Meßgröße $y(t) = \Delta x_2(t)$ entworfen werden.

f) Bestimmen Sie die Beobachterverstärkung $l \in \mathbb{R}^2$ so, daß die Fehlerdynamik des Beobachters Eigenwerte bei -1 und -2 aufweist.

Aufgabe 2

15 Punkte

Gegeben ist ein System zweiter Ordnung mit Zustandsdarstellung

$$\dot{x}(t) = A\,x(t) + b\,u(t)$$

und reellwertigen Systemmatrizen

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 1 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \quad \text{sowie} \quad b = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{pmatrix}.$$

a) Für welche λ_1, λ_2, β_1, β_2 ist das System steuerbar?

b) Ist das System steuerbar im Fall, daß der Eingangsvektor b ein (Rechts-) Eigenvektor der Matrix A zum Eigenwert λ_1 ist?

c) Für welche λ_1, λ_2 ist das freie System ($u \equiv 0$) instabil?

Gehen Sie im weiteren von Systemmatrizen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

aus.

d) Liegt für dieses System Steuerbarkeit vor?

e) Bestimmen Sie den Vektor $k \in \mathbb{R}^2$ im Regelgesetz $u(t) = k^{\mathrm{T}} x(t)$ so, daß alle Eigenwerte im geschlossenen Regelkreis bei $-1 \pm j$ zu liegen kommen.

f) Welche Ruhelage stabilisiert das Regelgesetz aus Teilaufgabe e?

Aufgabe 3

15 Punkte

Betrachten Sie das lineare System

$$\dot{x}(t) = A\,x(t) + b\,u(t) \quad \text{mit} \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -3 & -4 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad b = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

a) Bestimmen Sie Eigenwerte und Eigenvektoren der Systemmatrix A.

b) Ermitteln Sie die Jordansche Normalform von A.

c) Bestimmen Sie die Transitionsmatrix $\Phi(t, t_0)$ zum System.

d) Zum Zeitpunkt $t_1 = 1$ werde der Zustand $x(t_1)^{\mathrm{T}} = (1,\ 0)$ angenommen. Wie lautet der Anfangszustand $x(t_0)$ zum Zeitpunkt $t_0 = 0$, wenn von t_0 bis t_1 als Eingang der Einheitssprung

$$u(t) = \begin{cases} 0\,, & t < 0 \\ 1\,, & t \geq 0 \end{cases}$$

angelegt wurde.

Hinweis: Zur Lösung von Teilaufgabe d) muß keine Matrixinverse bestimmt werden.

Aufgabe 4 **9 Punkte**

Ein an einem Betriebspunkt linearisiertes Systemmodell eines Dreitanksystems hat die Darstellung

$$\dot{x}(t) = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} x(t) + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} u(t)$$

$$y(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} x(t)$$

a) Bestimmen Sie den Vektorrelativgrad $d = (d_1,\ d_2)$ des Systems.

b) Zeigen Sie, daß das System statisch entkoppelbar ist.

c) Berechnen Sie geeignete Matrizen K und F für eine Zustandsrückführung

$$u(t) = K\,x(t) + F\,r(t)$$

so, daß gilt: $\dot{y}_1 = r_1(t)$ und $\dot{y}_2 = r_2(t)$ (Integratoren).

d) Wählen Sie ein geeignetes $c \in \mathbb{R}$ im Ansatz

$$r_i(t) = c\,y_i(t), \quad i = 1,2$$

so, daß beide Integratoren stabilisiert werden. Wird auf diese Weise auch die Stabilisierung des geschlossenen Regelkreises erreicht? (Begründung)