Klausur: Regelungs- und Systemtechnik 2

Kirchhoff-Hörsaal 1
Freitag, den 26. 09. 2014
Beginn: 10.00 Uhr
Bearbeitungszeit: 90 Minuten

Modalitäten

- Als Hilfsmittel sind **nur** handschriftliche Aufzeichnungen sowie Kopien der Vorlesungs- und Übungsunterlagen zugelassen.
- Bitte schreiben Sie mit dokumentenechtem Schreibgerät (Tinte oder Kugelschreiber).
- Zur Lösung der Aufgaben ist der freie Platz nach den jeweiligen Aufgaben vorgesehen; bei Bedarf werden Ihnen weitere Lösungsblätter ausgehändigt.
- Für alle Berechnungen sind die **Lösungswege** darzustellen. Die alleinige Angabe eines Ergebnisses wird als Lösung nicht bewertet.

Name: ______________________

Matr.-Nr.: ______________________

Studiengang: ______________________

Aufgabe	1	2	3			Σ
max. Punkte	21	18	14			53
erreichte Punkte						
					Note	

Aufgabe 1

21 Punkte

Betrachten Sie das zeitdiskrete LTI-System

$$x(i+1) = A\,x(i) + B\,u(i)$$

wobei

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

a) Ist der Ursprung des freien Systems ($u \equiv 0$) asymptotisch stabil?

b) Ist das System steuerbar?

c) Bestimmen Sie $k \in \mathbb{R}^3$ für einen Deadbeat-Regler $u(i) = k^{\mathrm{T}} x(i)$, der sämtiche Eigenwerte der Dynamikmatrix des geschlossenen Regelkreises auf null legt. Welche Ruhelage stellt sich ein?

d) Zeigen Sie: Der gesamte Systemzustand ist bzgl. jedes Ausgangs $y \in \{x_1, x_2, x_3\}$ beobachtbar.

Im weiteren sei $y = x_2$ der gemessene Ausgang.

e) Legen Sie die Beobachterverstärkung $l \in \mathbb{R}^3$ so fest, daß die Beobachterfehlerdynamik $A + l\,C$ nur Eigenwerte bei null aufweist und geben Sie das resultierende Beobachtersystem an.

f) Zur Regelung werde nun der Regler $u(i) = k^{\mathrm{T}} \hat{x}(i)$ mit k nach Teilaufgabe c und Schätzzustand $\hat{x}$ aus dem Beobachter nach Teilaufgabe e verwendet. In wievielen Schritten wird die Ruhelage erreicht?

Aufgabe 2

18 Punkte

Gegeben sei die Zustandsgleichung

$$\dot{x}(t) = A\,x(t) + B\,u(t)$$

wobei

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

a) Bestimmen Sie die Eigenwerte und die Jordansche Normalform von A.

b) Ermitteln Sie die Transitionsmatrix $\Phi(t, t_0)$ des Systems.

c) Berechnen Sie die Steuerbarkeits-Gramsche $W(t_0, t_1) = W(0, t_1)$ des Systems.

Im weiteren sei die inverse Steuerbarkeitsmatrix gegeben als: $W^{-1}(0,1) = \dfrac{1}{3-e} \begin{pmatrix} e+1 & \star \\ e-1 & \star \end{pmatrix}$.

d) Berechnen Sie ein Stellsignal $u = \tilde{u}(t)$ auf $t \in [0,1]$, das den Anfangszustand $x(0)^{\mathrm{T}} = (1,\ 0)$ zum Zeitpunkt $t_0 = 0$ im Zeitpunkt $t_1 = 1$ in den Ursprung $x(1)^{\mathrm{T}} = (0,\ 0)$ überführt.

Bezeichne $\tilde{x}(t)$ den Zeitverlauf des Zustands, der sich infolge $\tilde{u}(t)$ vom Anfangszustand aus einstellt. $\Delta x(t) = x(t) - \tilde{x}(t)$ und $\Delta u(t) = u(t) - \tilde{u}(t)$ benennen die entsprechende Abweichungsgrößen.

e) Ist das System in den Abweichungsgrößen Δx und Δu, d.h. entlang der Trajektorie $(\tilde{x}(t), \tilde{u}(t))$ BIBO-stabil?

Aufgabe 3

14 Punkte

Ein vereinfachtes Modell eines mechanischen Systems

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A\,x(t) + B\,u(t) \\ y(t) &= C\,x(t) \end{aligned}$$

mit

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}$$

soll mit einem PI-Regler

$$u(t) = -K_{\mathrm{P}}\,(y(t) - r) - K_{\mathrm{I}} \int_0^t (y(\tau) - r)\,d\tau$$

geregelt werden. Dabei sind die Reglerverstärkungen K_{P}, K_{I} und der Sollwert r reelle Konstanten.

a) Bestimmen Sie die Dynamikmatrix des Systems im geschlossenen Regelkreis.

b) Berechnen Sie den Bereich für K_{P} und K_{I}, für den die Dynamikmatrix des Systems im geschlossenen Regelkreis Hurwitz ist.

Das System sei nun mit einer konstanten, ausgangseitigen Störung d beaufschlagt, d.h. es gelte

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A\,x(t) + B\,u(t) \\ y(t) &= C\,x(t) + d \end{aligned}$$

mit A, B, C wie oben. Die Reglerparameter K_{P} und K_{I} seien aus dem stabilisierenden Bereich gewählt.

c) Bestimmen Sie den stationären Ausgang $\lim_{t\to\infty} y(t)$ des geregelten Systems.

Hinweis: Setzen Sie den Integriererzustand zu $x_3(t) := \int_0^t (y(\tau) - r)\,d\tau$.