Regelungs- und Systemtechnik 2 - Zusatz zu Übung 3 Winter 09

Aufgabe:

Dieses Beispiel behandelt die Modellierung eines zweiarmigen Roboter (s. Abb. 1). Der Roboterarm besteht aus zwei starren Körpern mit den Massen m_1, m_2 und den Längen l_1, l_2, wobei der Schwerpunkt von Arm 1 mit (x_1, y_1), der von Arm 2 mit (x_2, y_2) bezeichnet wird. Die Arme haben bezüglich ihres Armschwerpunktes die entsprechenden Trägheitsmomente J_1, J_2. Der Winkel Θ_1 beschreibt die Lage des Roboterarmes bezüglich der Horizontalen im Aufpunkt, der Winkel Θ_2 die Lage des zweiten Armes in Bezug zur Horizontalen. In beiden Gelenken können unabhängig voneinander die Drehmomente τ_1, τ_2 ins System eingeprägt werden. Da der Roboter zwei Aktuatoren hat und aus zwei Massen und zwei Gelenken besteht, spricht man von einem vollaktuierten Roboter.

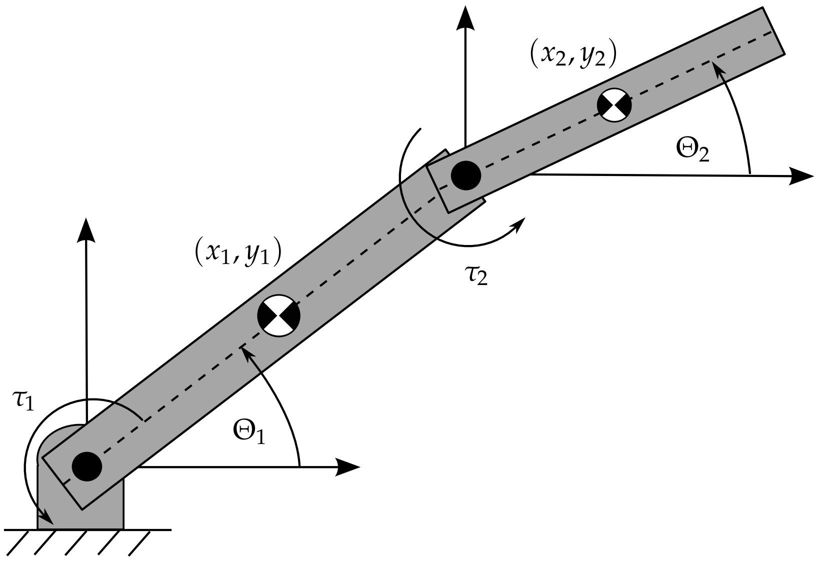

Abbildung 1: Schematische Zeichnung des zweiarmigen Roboters

- Der erste Schritt umfasst die Modellbildung des System, so dass am Ende die Systemdifferentialgleichungen zur Verfügung stehen. Dazu ist die Herangehensweise anhand von Lagrange-Funktionen hilfreich, um die komplizierte Dynamik leichter herleiten zu können.
- Nach durchgeführter Modellierung schreibt man das System auf die in der Robotik übliche Darstellung

$$M(q)\ddot{q} + C(q,\dot{q})\dot{q} + \frac{\partial V(q)}{\partial q} = B(q)\tau \tag{1}$$

um.
- Als nächstes schreibt man die Zustandsgleichung für den zweifach-aktuierten Roboterarm auf. Hat man den Aktuator am Aufpunkt nicht zur Verfügung, d.h. man kann kein Drehmoment τ_1 einprägen, so spricht man von einem unteraktuierten Roboter (*Acrobot*). Auch hierfür wird die Zustandsgleichung aufgestellt.

- Im letzten Schritt wird der vollaktuierte Roboterarm bzw. der Acrobot um die Ruhelage $\Theta_1 = 90°, \Theta_2 = 90°, \dot{\Theta}_1 = \dot{\Theta}_2 = 0$ mit den Eingängen $\tau_1 = \tau_2 = 0$ linearisiert. Als Parameter verwendet man $m_1 = 1, m_2 = 2, J_1 = 7/4, J_2 = 2, l_1 = 1, l_2 = 2, g = 1$, womit sich die Gleichungen wesentlich vereinfachen.

Lösung:

- Man beginnt mit der Lagrange-Funktion

$$L = T - V, \qquad T \ldots \text{kinetische Energie}, V \ldots \text{potentielle Energie}$$

und berechnet anhand der Lagrange-Gleichung

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial L}{\partial q} = 0, \qquad q \ldots \text{generalisierte Koordinaten}$$

die Bewegungsdifferentialgleichungen:

Die kinetische und potentielle Energie des i-ten Roboterarms werden durch

$$T_i = \frac{1}{2}J_i\dot{\Theta}_i^2 + \frac{1}{2}m_i(\dot{x}_i^2 + \dot{y}_i^2), \quad V_i = m_i g y_i$$

beschrieben. Die generalisierten Koordinaten sind $q^{\mathrm{T}} = (\Theta_1 \quad \Theta_2)$. Bisher ist die Kopplung zwischen den beiden Roboterarmen noch nicht berücksichtigt. Dies ändert sich, wenn man im nächsten Schritt die kartesischen Koordinaten durch die generalisierten Koordinaten ersetzt:

$$x_1 = \frac{1}{2}l_1\cos\Theta_1, \qquad x_2 = l_1\cos\Theta_1 + \frac{1}{2}l_2\cos\Theta_2$$

$$y_1 = \frac{1}{2}l_1\sin\Theta_1, \qquad y_2 = l_1\sin\Theta_1 + \frac{1}{2}l_2\sin\Theta_2$$

Die Ableitungen hiervon sind

$$\dot{x}_1 = -\frac{1}{2}l_1\sin(\Theta_1)\dot{\Theta}_1, \qquad \dot{y}_1 = l_1\cos(\Theta_1)\dot{\Theta}_1,$$

$$\dot{x}_2 = -l_1\sin(\Theta_1)\dot{\Theta}_1 - \frac{1}{2}l_2\sin(\Theta_2)\dot{\Theta}_2, \qquad \dot{y}_2 = l_1\cos(\Theta_1)\dot{\Theta}_1 + \frac{1}{2}l_2\cos(\Theta_2)\dot{\Theta}_2.$$

Weiterhin benötigt man folgende Größen:

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2 =& \frac{1}{4}l_1^2\dot{\Theta}_1^2 \\
\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2 =& l_1^2\sin^2(\Theta_1)\dot{\Theta}_1^2 + l_1 l_2\sin(\Theta_1)\sin(\Theta_2)\dot{\Theta}_1\dot{\Theta}_2 + \frac{1}{4}l_2^2\sin^2(\Theta_2)\dot{\Theta}_2^2 \\
&+ l_1^2\cos^2(\Theta_1)\dot{\Theta}_1^2 + l_1 l_2\cos(\Theta_1)\cos(\Theta_2)\dot{\Theta}_1\dot{\Theta}_2 + \frac{1}{4}l_2^2\cos^2(\Theta_2)\dot{\Theta}_2^2 \\
=& l_1^2\dot{\Theta}_1^2 + l_1 l_2\underbrace{(\sin\Theta_1\sin\Theta_2 + \cos\Theta_1\cos\Theta_2)}_{\cos(\Theta_1-\Theta_2)}\dot{\Theta}_1\dot{\Theta}_2 + \frac{1}{4}l_2^2\dot{\Theta}_2^2 \\
=& l_1^2\dot{\Theta}_1^2 + l_1 l_2\cos(\Theta_1 - \Theta_2)\dot{\Theta}_1\dot{\Theta}_2 + \frac{1}{4}l_2^2\dot{\Theta}_2^2
\end{aligned}$$

Setzt man diese Ausdrücke nun ein, so erhält man

$$T = \frac{1}{2}J_1\dot{\Theta}_1^2 + \frac{1}{2}J_2\dot{\Theta}_2^2 + \frac{1}{8}m_1 l_1^2\dot{\Theta}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\left(l_1^2\dot{\Theta}_1^2 + l_1 l_2\cos(\Theta_1 - \Theta_2)\dot{\Theta}_1\dot{\Theta}_2 + \frac{1}{4}l_2^2\dot{\Theta}_2^2\right)$$

$$V = \frac{1}{2}m_1 g l_1\sin\Theta_1 + \frac{1}{2}m_2 g\left(l_1\sin\Theta_1 + \frac{1}{2}l_2\sin\Theta_2\right) = \frac{1}{2}g l_1\sin(\Theta_1)(m_1 + m_2) + \frac{1}{4}m_2 g l_2\sin\Theta_2$$

Schließlich wertet man die Lagrange-Gleichungen aus ($L = T - V$):

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot\Theta_1} - \frac{\partial L}{\partial \Theta_1} =& J_1\ddot\Theta_1 + \frac{1}{4}m_1 l_1^2\ddot\Theta_1 + m_2 l_1^2\ddot\Theta_1 + \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}m_2 l_1 l_2\cos(\Theta_1-\Theta_2)\dot\Theta_2\right)\\
&- \frac{1}{2}m_2 l_1 l_2\sin(\Theta_1-\Theta_2)\dot\Theta_1\dot\Theta_2 - \frac{1}{2}(m_1+m_2)g l_1\cos\Theta_1\\
=& \left(J_1 + l_1^2\left(\frac{1}{4}m_1 + m_2\right)\right)\ddot\Theta_1 - m_2 l_1 l_2\sin(\Theta_1-\Theta_2)\dot\Theta_1\dot\Theta_2 + \frac{1}{2}m_2 l_1 l_2\sin(\Theta_1-\Theta_2)\dot\Theta_2^2\\
&+ \frac{1}{2}m_2 l_1 l_2\cos(\Theta_1-\Theta_2)\ddot\Theta_2 + \frac{1}{2}(m_1+m_2)g l_1\cos\Theta_1\\
\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot\Theta_2} - \frac{\partial L}{\partial \Theta_2} =& J_2\ddot\Theta_2 + \frac{1}{4}m_2 l_2^2\ddot\Theta_2 + \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}m_2 l_1 l_2\cos(\Theta_1-\Theta_2)\dot\Theta_1\right)\\
&+ \frac{1}{2}m_2 l_1 l_2\sin(\Theta_1-\Theta_2)\dot\Theta_1\dot\Theta_2 - \frac{1}{4}m_2 g l_2\cos\Theta_2\\
=& \left(J_2 + \frac{1}{4}m_2 l_2^2\right)\ddot\Theta_2 - m_2 l_1 l_2\sin(\Theta_1-\Theta_2)\dot\Theta_1\dot\Theta_2\\
&- \frac{1}{2}m_2 l_1 l_2\sin(\Theta_1-\Theta_2)\ddot\Theta_1 + \frac{1}{4}m_2 g l_2\cos\Theta_2
\end{aligned}$$

•

$$M(q) = \begin{pmatrix} J_1 + \frac{1}{4}m_1 l_1^2 + m_2 l_1^2 & \frac{1}{2}m_2 l_1 l_2\cos(\Theta_1-\Theta_2)\\ \frac{1}{2}m_2 l_1 l_2\cos(\Theta_1-\Theta_2) & J_2 + \frac{1}{4}m_2 l_2^2\end{pmatrix}, \qquad q = \begin{pmatrix}\Theta_1\\ \Theta_2\end{pmatrix},$$

$$C(q,\dot q) = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2}m_2 l_1 l_2\sin(\Theta_1-\Theta_2)\dot\Theta_2\\ -\frac{1}{2}m_2 l_1 l_2\sin(\Theta_1-\Theta_2)\dot\Theta_1 & 0\end{pmatrix},$$

$$\frac{\partial V(q)}{\partial q} = \begin{pmatrix}\frac{1}{2}(m_1+m_2)g l_1\cos\Theta_1\\ \frac{1}{4}m_2 g l_2\cos\Theta_2\end{pmatrix}, \qquad B(q) = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}, \qquad \tau = \begin{pmatrix}\tau_1\\ \tau_2\end{pmatrix}$$

- Wir haben das mechanische System nun in der Darstellung

$$M(q)\ddot q + C(q,\dot q)\dot q + \frac{\partial V(q)}{\partial q} = B(q)\tau$$

vorliegen. Die Matrix $M(q)$ ist für alle Zeiten invertierbar, also kann man mit der Inversen von links multiplizieren:

$$\ddot q + \underbrace{M^{-1}(q)C(q,\dot q)}_{=:\, C_M(q,\dot q)}\dot q + \underbrace{M^{-1}(q)\frac{\partial V(q)}{\partial q}}_{=:\, V_M(q)} = \underbrace{M^{-1}(q)B(q)}_{=:\, B_M(q)}\tau$$

$$\ddot q + C_M(q,\dot q)\dot q + V_M(q) = B_M(q)\tau$$

Wählt man als neue Koordinaten $x_1 = \Theta_1, x_2 = \dot\Theta_1, x_3 = \Theta_2, x_4 = \dot\Theta_2$, so erhält man

$$\dot x = \begin{pmatrix}\dot x_1\\ \dot x_2\\ \dot x_3\\ \dot x_4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2\\ -C_M^1(x)\begin{pmatrix}x_2\\ x_4\end{pmatrix} - V_M^1(x_1,x_3) + B_M^1(x_1,x_3)\tau\\ x_4\\ -C_M^2(x)\begin{pmatrix}x_2\\ x_4\end{pmatrix} - V_M^2(x_1,x_3) + B_M^2(x_1,x_3)\tau\end{pmatrix},$$

wobei der Index von V_M, C_M, B_M die erste bzw. zweite Zeile der Matrix/des Vektors bezeichnet. Im Falle des Acrobots vereinfachen sich die Gleichungen etwas, da nun

$$\tau = \tau_2, \qquad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

gilt:

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 \\ -C_M^1(x) \begin{pmatrix} x_2 \\ x_4 \end{pmatrix} - V_M^1(x_1, x_3) + B_M^1(x_1, x_3)\tau_2 \\ x_4 \\ -C_M^2(x) \begin{pmatrix} x_2 \\ x_4 \end{pmatrix} - V_M^2(x_1, x_3) + B_M^2(x_1, x_3)\tau_2 \end{pmatrix}.$$

- Gegebene Parameter: $m_1 = 1, m_2 = 2, J_1 = 7/4, J_2 = 2, l_1 = 1, l_2 = 2, g = 1$.

  Die Linearisierung um die Ruhelage $\Theta_1 = 90°, \Theta_2 = 90°, \dot{\Theta}_1 = \dot{\Theta}_2 = 0$ mit den Eingängen $\tau_1 = \tau_2 = 0$ führt für den vollaktuierten Roboter auf

$$\Delta\dot{x} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{6} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{3} & 0 \end{pmatrix} \Delta x + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{6} \\ 0 & 0 \\ -\frac{1}{6} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta\tau_1 \\ \Delta\tau_2 \end{pmatrix}$$

  und für den Acrobot auf

$$\Delta\dot{x} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{6} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{3} & 0 \end{pmatrix} \Delta x + \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{6} \\ 0 \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix} \Delta\tau_2.$$