Beiblatt 1: Steuerbarkeitskriterien

Der folgende Satz enthält eine Zusammenstellung von Steuerbarkeitskriterien für MIMO-LTI-Systeme

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t), \quad x(0) = x_0 \\ y(t) &= Cx(t) + Du(t) \end{aligned}$$

mit $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n\times m}$, $C \in \mathbb{R}^{p\times n}$ und $D \in \mathbb{R}^{p\times p}$.

Satz (Steuerbarkeitskriterien für zeitkontinuierliche MIMO-LTI-Systeme).
Die folgenden Aussagen sind einander äquivalent:

1. *Das Paar* (A, B) *ist steuerbar.*
2. *Die Matrix (Steuerbarkeits Gramsche)*

   $$W(t) := \int_0^t e^{A\tau} BB^\top e^{A^\top \tau} d\tau$$

   ist für beliebige $t > 0$ *positiv definit.*
3. *Die Steuerbarkeitsmatrix (nach Kalman)*

   $$R = (B,\ AB,\ A^2B,\ \ldots,\ A^{n-1}B)$$

   hat (vollen) Rang n, d.h. es gilt: $\mathrm{Im}(R) = \mathbb{R}^n$.
4. *Die Matrix* $(A-\lambda I,\ B)$ *hat (vollen) Rang n für alle* $\lambda \in \mathbb{C}$.
5. *Sei* λ *ein beliebiger Eigenwert von A. Jeder Linkseigenvektor v von A zum Eigenwert* λ*, d.h.* $v^* A = v^* \lambda$*, erfüllt* $v^* B \neq 0^\top$.[1]
6. *Es gibt eine Matrix* $F \in \mathbb{R}^{m\times n}$ *so, daß die Eigenwerte der Matrix* $A + BF$ *mittels F beliebig festgelegt werden können (mit der Einschränkung, daß komplexe Eigenwerte konjugiert komplex auftreten).*

□

Bemerkungen:

zu 4. Die Matrix $(A-\lambda I,\ B)$ hat sicher vollen Rang für alle $\lambda \in \mathbb{C}$, die kein Eigenwert von A sind (λ ist keine Nullstelle von $\det(\lambda I - A)$). Demnach muß der Rang nur für die Eigenwerte überprüft werden.

zu 5. Damit ist beispielsweise leicht zu zeigen, daß das Paar $\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ nicht steuerbar, das Paar $\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ aber steuerbar ist.

zu 6. Die Matrix $A + BF$ ist die Dynamikmatrix des mit $u = F\,x$ geschlossenen Regelkreises.

[1] Der Ausdruck v^* bezeichnet den zu $v \in \mathbb{C}^n$ konjugiert komplex transponierten Vektor.