Beiblatt 3: Stabilisierbarkeits- und Detektierbarkeitskriterien

Der folgenden Sätze beziehen sich auf MIMO-LTI-Systeme

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t), \quad x(0) = x_0\\ y(t) &= Cx(t) + Du(t)\end{aligned}$$

mit $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n\times m}$, $C \in \mathbb{R}^{p\times n}$ und $D \in \mathbb{R}^{p\times p}$.

Satz (Stabilisierbarkeitskriterien für zeitkontinuierliche MIMO-LTI-Systeme)**.**
Die folgenden Aussagen sind einander äquivalent:

1. *Das Paar (A, B) ist stabilisierbar.*
2. *Die Matrix $(A-\lambda I,\ B)$ hat (vollen) Rang n für alle $\lambda \in \mathbb{C}$ mit $\mathrm{Re}(\lambda) \geq 0$.*
3. *Sei λ ein beliebiger Eigenwert von A mit $\mathrm{Re}(\lambda) \geq 0$. Jeder Linkseigenvektor v von A zum Eigenwert λ, d.h. $v^*A = v^*\lambda$, erfüllt $v^*B \neq 0^\top$.*
4. *Für alle Eigenwerte der Dynamikmatrix $\bar{A}_{\bar{R}}$ bzw. $\tilde{A}_{\bar{R}}$ des nicht-steuerbaren Teilsystems sind die Realteile negativ.*
5. *Es gibt eine Matrix $F \in \mathbb{R}^{m\times n}$ so, daß die Matrix $A + BF$ Hurwitz ist.*

$\square$

Satz (Detektierbarkeitskriterien für zeitkontinuierliche MIMO-LTI-Systeme)**.**
Die folgenden Aussagen sind einander äquivalent:

1. *Das Paar (C, A) ist detektierbar.*
2. *Die Matrix $\begin{pmatrix} A-\lambda I \\ C \end{pmatrix}$ hat (vollen) Rang n für alle $\lambda \in \mathbb{C}$ mit $\mathrm{Re}(\lambda) \geq 0$.*
3. *Sei λ ein beliebiger Eigenwert von A mit $\mathrm{Re}(\lambda) \geq 0$. Jeder Rechtseigenvektor w von A zum Eigenwert λ, d.h. $A\,w = \lambda\,w$, erfüllt $Cw \neq 0$.*
4. *Für alle Eigenwerte der Dynamikmatrix $\hat{A}_{\bar{O}}$ bzw. $\check{A}_{\bar{O}}$ des nicht-beobachtbaren Teilsystems sind die Realteile negativ.*
5. *Es gibt eine Matrix $L \in \mathbb{R}^{n\times p}$ so, daß die Matrix $A + LC$ Hurwitz ist.*
6. *Das Paar $(A^\top, C^\top)$ ist stabilisierbar.*

$\square$