Beiblatt 4: Kalman-Zerlegung

Der folgende Satz bezieht sich auf MIMO-LTI-Systeme

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t), \quad x(0) = x_0 \\ y(t) &= Cx(t) + Du(t) \end{aligned} \tag{1}$$

mit $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n\times m}$, $C \in \mathbb{R}^{p\times n}$ und $D \in \mathbb{R}^{p\times p}$.

Satz (Kalman-Zerlegung)**.**

Für jedes System der Form (1) existiert eine Zustandstransformation $\breve{x} = T\,x$ mit invertierbarer Matrix $T \in \mathbb{R}^{n\times n}$ so, daß

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} \breve{x}_{\mathrm{RO}} \\ \breve{x}_{\mathrm{R\bar{O}}} \\ \breve{x}_{\mathrm{\bar{R}O}} \\ \breve{x}_{\mathrm{\bar{R}\bar{O}}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \breve{A}_{\mathrm{RO}} & 0 & \breve{A}_{13} & 0 \\ \breve{A}_{21} & \breve{A}_{\mathrm{R\bar{O}}} & \breve{A}_{23} & \breve{A}_{24} \\ 0 & 0 & \breve{A}_{\mathrm{\bar{R}O}} & 0 \\ 0 & 0 & \breve{A}_{43} & \breve{A}_{\mathrm{\bar{R}\bar{O}}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \breve{x}_{\mathrm{RO}} \\ \breve{x}_{\mathrm{R\bar{O}}} \\ \breve{x}_{\mathrm{\bar{R}O}} \\ \breve{x}_{\mathrm{\bar{R}\bar{O}}} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \breve{B}_{\mathrm{RO}} \\ \breve{B}_{\mathrm{R\bar{O}}} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} u$$

$$y = \begin{pmatrix} \breve{C}_{\mathrm{RO}} & 0 & \breve{C}_{\mathrm{\bar{R}O}} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \breve{x}_{\mathrm{RO}} \\ \breve{x}_{\mathrm{R\bar{O}}} \\ \breve{x}_{\mathrm{\bar{R}O}} \\ \breve{x}_{\mathrm{\bar{R}\bar{O}}} \end{pmatrix} + D\,u\,.$$

Dabei bezeichnen

- $\breve{x}_{\mathrm{RO}}$ *den steuerbaren und beobachtbaren Anteil,*
- $\breve{x}_{\mathrm{R\bar{O}}}$ *den steuerbaren und nicht-beobachtbaren Anteil,*
- $\breve{x}_{\mathrm{\bar{R}O}}$ *den nicht-steuerbaren und beobachtbaren Anteil,*
- $\breve{x}_{\mathrm{\bar{R}\bar{O}}}$ *den nicht-steuerbaren und nicht-beobachtbaren Anteil*

des Zustandsraums.

Für die Übertragungsmatrix von u nach y gilt:

$$G(s) = C\,(sI - A)^{-1}\,B + D = \breve{C}_{\mathrm{RO}}\,\left(sI - \breve{A}_{\mathrm{RO}}\right)^{-1}\,\breve{B}_{\mathrm{RO}} + D\,.$$

□

Bemerkung:

- Man beachte, daß bei nicht homogenen Anfangswerten, $x_0 \neq 0$, das Übertragungsverhalten nicht vollständig durch die Übertragungsmatrix $G(s)$ charakterisiert ist.