Beiblatt 5: Gilbert-Realisierung

Wir betrachten eine Übertragungsmatrix $G(s)$ mit gebrochen rationalen Einträgen, proper und der Dimension $p \times m$. Sie habe die Form

$$G(s) = \frac{1}{d(s)} P(s)$$

mit Polynommatrix $P(s)$ und Polynom $d(s)$. Dies kann ohne Beschränkung der Allgemeinheit für beliebige $G(s)$ erreicht werden, z.B. indem man $d(s)$ als kleinstes gemeinsames Vielfaches der Linearfaktoren aller Nennerpolynome der gebrochen rationalen Einträge von $G(s)$ wählt.

Der Einfachheit halber nehmen wir im weiteren an, daß

$$d(s) = (s - \lambda_1)(s - \lambda_2) \cdots (s - \lambda_r)$$

mit r paarweise verschiedenen reellen Wurzeln (Polen) vorliegt, d.h. es gelte $\lambda_i \neq \lambda_j$ für $i \neq j$ und $\lambda_i \in \mathbb{R},\ i, j = 1, 2, \ldots, r$. Komponentenweise Partialbruchzerlegung liefert dann

$$G(s) = D + \frac{1}{s - \lambda_1} W_1 + \cdots + \frac{1}{s - \lambda_r} W_r$$

mit Matrizen $D, W_i \in \mathbb{R}^{p \times m}$.

Nun sucht man Matrizen $C_i \in \mathbb{R}^{p \times \kappa_i}$, $B_i \in \mathbb{R}^{\kappa_i \times m}$ mit $\kappa_i = \mathrm{Rang}(W_i)$ so, daß W_i faktorisiert[1], d.h.

$$W_i = C_i\, B_i$$

für $i = 1, 2, \ldots, r$.

Damit folgt nun

$$\begin{aligned}
G(s) &= (C_1, C_2, \ldots, C_r)\, \mathrm{diag}\left(\frac{1}{s-\lambda_1} I_{\kappa_1},\ \frac{1}{s-\lambda_2} I_{\kappa_2},\ \ldots\ ,\ \frac{1}{s-\lambda_r} I_{\kappa_r} \right) \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \\ \vdots \\ B_r \end{pmatrix} + D \\
&= (C_1, C_2, \ldots, C_r) \left(\mathrm{diag}\Big(s\, I_{\kappa_1} - \lambda_1 I_{\kappa_1},\ s\, I_{\kappa_2} - \lambda_2 I_{\kappa_2},\ \ldots\ ,\ s\, I_{\kappa_r} - \lambda_r I_{\kappa_r} \Big) \right)^{-1} \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \\ \vdots \\ B_r \end{pmatrix} + D \\
&= (C_1, C_2, \ldots, C_r) \left(s\, I - \mathrm{diag}\Big(\lambda_1 I_{\kappa_1},\ \lambda_2 I_{\kappa_2},\ \ldots\ ,\ \lambda_r I_{\kappa_r} \Big) \right)^{-1} \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \\ \vdots \\ B_r \end{pmatrix} + D \\
&= \left(\begin{array}{ccc|c} \lambda_1 I_{\kappa_1} & & & B_1 \\ & \ddots & & \vdots \\ & & \lambda_r I_{\kappa_r} & B_r \\ \hline C_1 & \cdots & C_r & D \end{array} \right) \qquad \text{(Gilbert-Realisierung)}
\end{aligned}$$

Diese Realisierung hat die Ordnung $n = \kappa_1 + \cdots + \kappa_r$ und ist offenbar sowohl steuerbar als auch beobachtbar, d.h. sie ist minimal.

[1] Wegen $\mathrm{Rang}(W_i) = \kappa_i$ kann man aus W_i genau κ_i linear unabhängige Spalten auswählen (eine Basis von $\mathrm{Im}(W_i)$). Diese können die Spalten der gesuchten Matrix C_i bilden. Die Spalten der Matrix B_i enthalten dann die Linearkoeffizienten, die mit Hilfe der Spalten von C_i in die Spalten von W_i resultieren.