Beiblatt 7: Möbius-Transformation [Linear Fractional Transformation]

Definition (Möbius-Transformation [Linear Fractional Transformation = LFT])**.**
Sei M eine Blockmatrix der Form

$$M = \begin{pmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{(p_1+p_2)\times(m_1+m_2)}$$

und $\Delta_\mathrm{u} \in \mathbb{C}^{m_1\times p_1}$, $\Delta_\mathrm{l} \in \mathbb{C}^{m_2\times p_2}$.

Eine obere Möbius-Transformation [upper LFT] ist

$$\mathcal{F}_\mathrm{u}(M,\Delta_\mathrm{u}) := M_{22} + M_{21}\Delta_\mathrm{u}\,(I - M_{11}\Delta_\mathrm{u})^{-1}\,M_{12}, \quad \mathcal{F}_\mathrm{u}(M,\Delta_\mathrm{u}) \in \mathbb{C}^{p_2\times m_2}\,,$$

vorausgesetzt $(I - M_{11}\Delta_\mathrm{u})^{-1}$ *existiert.*

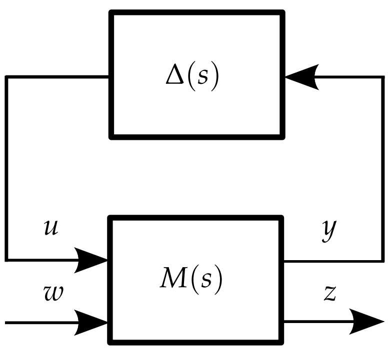
Eine untere Möbius-Transformation [lower LFT] ist

$$\mathcal{F}_\mathrm{l}(M,\Delta_\mathrm{l}) := M_{11} + M_{12}\Delta_\mathrm{l}\,(I - M_{22}\Delta_\mathrm{l})^{-1}\,M_{21}, \quad \mathcal{F}_\mathrm{l}(M,\Delta_\mathrm{u}) \in \mathbb{C}^{p_1\times m_1}\,,$$

vorausgesetzt $(I - M_{22}\Delta_\mathrm{l})^{-1}$ *existiert.*

Mit Hilfe der Möbius-Transformation lassen sich gekoppelte Systeme einfacher darstellen:

(a) Obere Möbius-Transformation



Wenn

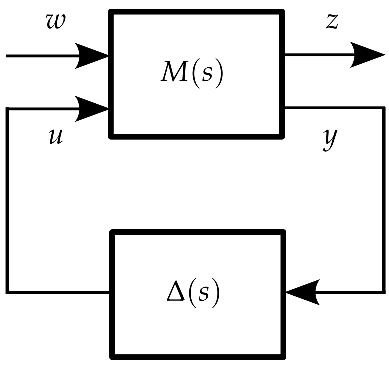
$$\begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ w \end{pmatrix}, \quad u = \Delta\, y\,,$$

dann läßt sich die Übertragungsmatrix von w nach z, T_{zw}, als obere Möbius-Transformation

$$T_{zw} = \mathcal{F}_\mathrm{u}(M,\Delta)$$

schreiben.

(b) Untere Möbius-Transformation



Wenn

$$\begin{pmatrix} z \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w \\ u \end{pmatrix}, \quad u = \Delta\, y\,,$$

dann läßt sich die Übertragungsfunktion von w nach z, T_{zw}, als untere Möbius-Transformation

$$T_{zw} = \mathcal{F}_\mathrm{l}(M,\Delta)$$

schreiben.