Beiblatt 8: Stabilisierende reelle Lösung der algebraischen Riccati-Gleichung

Unter den Annahmen des in der Vorlesung vorgestellten Satzes ist $\mathcal{X}_-$ ein H-invarianter Unterraum. Da der Vektorraum $\mathcal{X}_-$ gerade von den Eigen- und Hauptvektoren von H aufgespannt wird, die zu Eigenwerten von H mit negativem Realteil gehören, existiert eine Matrix $\Lambda \in \mathbb{C}^{n\times n}$ mit diesen Eigenwerten so, daß mit den Bezeichnungen aus der Vorlesung gilt

$$H\begin{pmatrix}X_1\\X_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}X_1\\X_2\end{pmatrix}\Lambda \quad\Longleftrightarrow\quad \begin{pmatrix}A & R\\-Q & -A^\top\end{pmatrix}\begin{pmatrix}X_1\\X_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}X_1\\X_2\end{pmatrix}\Lambda\,. \tag{1}$$

Unter Verwendung von $X=X_2X_1^{-1}$ und der geforderten Existenz der Inversen X_1^{-1} folgt

$$\begin{aligned}&&\begin{pmatrix}A & R\\-Q & -A^\top\end{pmatrix}\begin{pmatrix}I\\X\end{pmatrix}&=\begin{pmatrix}I\\X\end{pmatrix}X_1\Lambda X_1^{-1} && (2)\\ &\Longrightarrow\quad &\begin{pmatrix}X & -I\end{pmatrix}\begin{pmatrix}A & R\\-Q & -A^\top\end{pmatrix}\begin{pmatrix}I\\X\end{pmatrix}&=0\\ &\Longleftrightarrow\quad & A^\top X+X\,A+XRX+Q&=0\,.\end{aligned}$$

Damit ist gezeigt, daß $X=X_2X_1^{-1}$ eine Lösung der algebraischen Riccati-Gleichung ist.

Daß $A+RX$ Hurwitz ist, erkennt man sofort an der ersten Zeile von (2), d.h.

$$A+RX=X_1\,\Lambda\,X_1^{-1}\,,$$

denn $A+RX$ ist mit Λ (alle Eigenwerte von Λ liegen in $\mathbb{C}^-$) über eine Ähnlichkeitstransformation verbunden.

Um schließlich zu erkennen, daß die auf diese Weise konstruierte Lösung X symmetrisch ist, betrachten wir eine kleine Abwandlung von Gleichung (1) in der Form

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix}X_1\\X_2\end{pmatrix}^\star\begin{pmatrix}0 & -I\\I & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}A & R\\-Q & -A^\top\end{pmatrix}\begin{pmatrix}X_1\\X_2\end{pmatrix}&=\begin{pmatrix}X_1\\X_2\end{pmatrix}^\star\begin{pmatrix}0 & -I\\I & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}X_1\\X_2\end{pmatrix}\Lambda\\ \Longleftrightarrow\quad \begin{pmatrix}X_1\\X_2\end{pmatrix}^\star\begin{pmatrix}Q & A^\top\\A & R\end{pmatrix}\begin{pmatrix}X_1\\X_2\end{pmatrix}&=\begin{pmatrix}X_1\\X_2\end{pmatrix}^\star\begin{pmatrix}-X_2\\X_1\end{pmatrix}\Lambda\\ \Longleftrightarrow\quad \begin{pmatrix}X_1\\X_2\end{pmatrix}^\star\begin{pmatrix}Q & A^\top\\A & R\end{pmatrix}\begin{pmatrix}X_1\\X_2\end{pmatrix}&=(-X_1^\star X_2+X_2^\star X_1)\,\Lambda \qquad (3)\end{aligned}$$

Wegen der Symmetrie der Matrix ist die linke Seite von Gleichung (3) hermitesch und damit auch deren rechte Seite. Es folgt also:

$$\begin{aligned}&(-X_1^\star X_2+X_2^\star X_1)\,\Lambda=\Lambda^\star\,(-X_2^\star X_1+X_1^\star X_2)\\ \Longleftrightarrow\quad &\underbrace{(-X_1^\star X_2+X_2^\star X_1)}_{=P}\Lambda+\Lambda^\star\underbrace{(-X_1^\star X_2+X_2^\star X_1)}_{=P}=0\,. \qquad (4)\end{aligned}$$

Beziehung (4) ist eine Lyapunov-Gleichung und hat also solche genau dann eine eindeutige Lösung, wenn für die Eigenwerte von Λ gilt: $\lambda_i(\Lambda)+\bar\lambda_j(\Lambda)\neq 0$, $\forall i,j=1,2,\ldots,n$. Da sämtliche Eigenwerte von Λ negativen Realteil haben, ist diese Bedingung erfüllt und Lyapunov-Gleichung (4) hat eine eindeutige Lösung P. Diese ist offenbar $P=0$, womit sich ergibt:

$$-X_1^\star X_2+X_2^\star X_1=0 \quad\Longleftrightarrow\quad X_1^\star X_2=X_2^\star X_1\,.$$

Damit erhalten wir

$$X_2X_1^{-1}=X_1^{\star-1}\,(X_1^\star X_2)\,X_1^{-1}=X_1^{\star-1}\,(X_2^\star X_1)\,X_1^{-1}=X_1^{\star-1}X_2^\star=\left(X_2X_1^{-1}\right)^\star,$$

d.h. $X=X_2X_1^{-1}$ ist hermitesch und für reellwertige X_1, X_2 dann symmetrisch.