Klausur: Regelungs- und Systemtechnik 3

Winter 2020/2021

Humboldt-Hörsaal
Freitag, den 09. 04. 2021
Beginn: 13.30 Uhr
Bearbeitungszeit: 120 Min

Modalitäten

- Als Hilfsmittel sind **nur** handschriftliche Aufzeichnungen, Kopien der Vorlesungs- und Übungsunterlagen sowie Übungsklausuren zugelassen.
- Bitte schreiben Sie mit dokumentenechtem Schreibgerät (Tinte oder Kugelschreiber).
- Zur Lösung der Aufgaben ist der freie Platz nach den jeweiligen Aufgaben vorgesehen; bei Bedarf werden Ihnen Zusatzblätter ausgehändigt.
- Für alle Berechnungen sind die **Lösungswege** darzustellen. Die alleinige Angabe eines Ergebnisses wird als Lösung nicht bewertet.

Name: ______________________

Matr.-Nr.: ______________________ Abgabe: ________

Studiengang: ______________________ Zusatzblätter: ____

Aufgabe	1	2	3	4		Σ
max. Punkte	16	11	17	16		60
erreichte Punkte						
					Note	

Aufgabe 1

16 Punkte

Gegeben sei das System

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t),\\ y(t) &= Cx(t)\end{aligned}$$

mit

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3}{4} \end{pmatrix}.$$

a) Zeigen Sie, dass das Paar (C, A) beobachtbar ist und geben Sie die zugehörigen Beobachtbarkeitsindizes an.

b) Transformieren Sie das System auf Beobachtungsnormalform. Verwenden Sie dabei die Notation $x_{\mathrm{O}}(t) = P_{\mathrm{O}}^{-1} x(t)$.

Es soll nun ein Beobachter der Form

$$\begin{aligned}\dot{\hat{x}}_{\mathrm{O}}(t) &= A_{\mathrm{O}} \hat{x}_{\mathrm{O}}(t) + B_{\mathrm{O}} u(t) + L(\hat{y}(t) - y(t)), \qquad L = \begin{pmatrix} l_1 & l_2 \end{pmatrix}, \qquad l_1, l_2 \in \mathbb{R}^3\\ \hat{y}(t) &= C_{\mathrm{O}} \hat{x}_{\mathrm{O}}(t)\end{aligned}$$

entworfen werden.

c) Stellen Sie die Beobachterfehlerdynamik zum Beobachterfehler $e = \hat{x}_{\mathrm{O}} - x_{\mathrm{O}}$ auf. Geben Sie zwei Lösungen für L an, so dass die Eigenwerte der Beobachterfehlerdynamik (mehrfach) bei $\lambda = -1$ liegen.

d) Sei nun $u = L^\top P_{\mathrm{O}} \hat{x}_{\mathrm{O}}$ mit einem L, das die Voraussetzungen aus Aufgabe c) erfüllt. Ist der Ursprung des geschlossenen Regelkreises asymptotisch stabil? (Begründung)

Hinweis: Eine numerische Rechnung ist hier nicht unbedingt notwendig.

Aufgabe 2

11 Punkte

Betrachten Sie die Übertragungsfunktion

$$G(s) = \begin{pmatrix} \frac{s}{(s+1)^2(s+2)^2} & \frac{s}{(s+2)^2} \\ -\frac{s}{(s+2)^2} & -\frac{s}{(s+2)^2} \end{pmatrix}.$$

a) Ist $G(s)$ strikt proper?

b) Berechnen Sie zu $G(s)$ die Smith-McMillan-Form $M(s)$.

c) Bestimmen Sie die Nullstellen und Pole von $G(s)$ sowie deren (kanalweise) Vielfachheiten.

d) Ist die Smith-McMillan-Form $M(s)$ proper?

Aufgabe 3 **17 Punkte**

Gegeben sei die Regelstrecke

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)\,, \qquad\qquad y(t) = Cx(t)$$

mit

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

a) Ist das System steuerbar bzw. stabilisierbar?

b) Ist das System beobachtbar bzw. detektierbar?

Für eine Betriebspunktregelung wird ein dynamische Ausgangsrückführung der Form

$$\dot{\hat{x}}(t) = \hat{A}\hat{x}(t) + \hat{B}_y y(t) + \hat{B}_r r\,, \qquad\qquad u(t) = \hat{C}\hat{x}(t) + \hat{D}y(t) + Fr$$

eingesetzt, wobei r eine konstante, skalare Referenzgröße ist. Die Systemgrößen sind gegeben als

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} -7 & -1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}, \quad \hat{B}_y = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{B}_r = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \hat{C} = \begin{pmatrix} -2 & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{D} = -2, \quad F = 2\,.$$

c) Der geschlossene Regelkreis genügt der Dynamik $\dot{\bar{x}}(t) = \bar{A}\bar{x}(t) + \bar{B}r$ mit $\bar{x}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ \hat{x}(t) \end{pmatrix}$. Bestimmen Sie die Matrizen $\bar{A}$ und $\bar{B}$.

Hinweis: Bestimmen Sie $\bar{A}$ und $\bar{B}$ zunächst in Abhängigkeit von A, B, C, $\hat{A}$, $\hat{B}_y$, $\hat{B}_r$, $\hat{C}$, $\hat{D}$ und F.

d) Ist der Regelkreis wohlgeformt? Ist der Regelkreis intern stabil?

e) Bestimmen Sie den stationären Zustand $\bar{x}_s = \lim_{t\to\infty} \bar{x}(t)$ in Abhängigkeit von r, falls eine stationäre Lösung existiert.

Aufgabe 4 **16 Punkte**

In einem Standardregelkreis seien die Übertragungsfunktionen von Regelstrecke P und Regler K gegeben mit

$$P(s) = \frac{2}{s-1}\,, \quad K(s) = \frac{K_\mathrm{P}}{\tau s + 1}\,, \quad K_\mathrm{P}, \tau \geq 0\,.$$

Zudem sei die Laplace-Transformierte $D_\mathrm{o}(s)$ einer ausgangsseitigen Störung $d_\mathrm{o}(t) \circ\!\!-\!\!\bullet\, D_\mathrm{o}(s)$ bekannt:

$$D_\mathrm{o}(s) = \frac{10}{s+1}\,.$$

a) Ist der entsprechende Regelkreis wohlgeformt? Geben Sie den Bereich für die Verstärkung K_P und die Filterkonstante τ an, in dem der Regelkreis intern stabil ist.

b) Bestimmen Sie rechnerisch die ausgangsssseitige Störsensitivität S_o. Bleibt der Ausgang unter den Annahmen aus a) für beschränkte Ausgangsstörungen d_o ebenso beschränkt?

c) Bestimmen Sie die $\mathcal{H}_\infty$-Norm der ausgangsseitigen Störsensitivität $\|S_\mathrm{o}\|_\infty$ für $\tau = 0$. Für welche Werte von K_P wird die Norm minimal?

Sei nunmehr $K_\mathrm{P} = 1$. In Abbildung 1 sind verschiedene Amplitudengangverläufe der Ausgangsstörantwort $|S_\mathrm{o}(j\omega)D_\mathrm{o}(j\omega)|$ für mögliche Werte von τ aufgetragen.

d) Ordnen Sie die Werte $\tau \in \left\{0, \frac{1}{2}, 1\right\}$ je einem der Amplitudenverläufe aus Abbildung 1 zu und begründen Sie Ihre Entscheidung.

e) Für welches τ im Stabilitätsbereich aus a) wird $|S_\mathrm{o}(j\omega_0)D_\mathrm{o}(j\omega_0)|$ minimal? Dabei bezeichnet ω_0 die Knickfrequenz von $D_\mathrm{o}(j\omega)$.

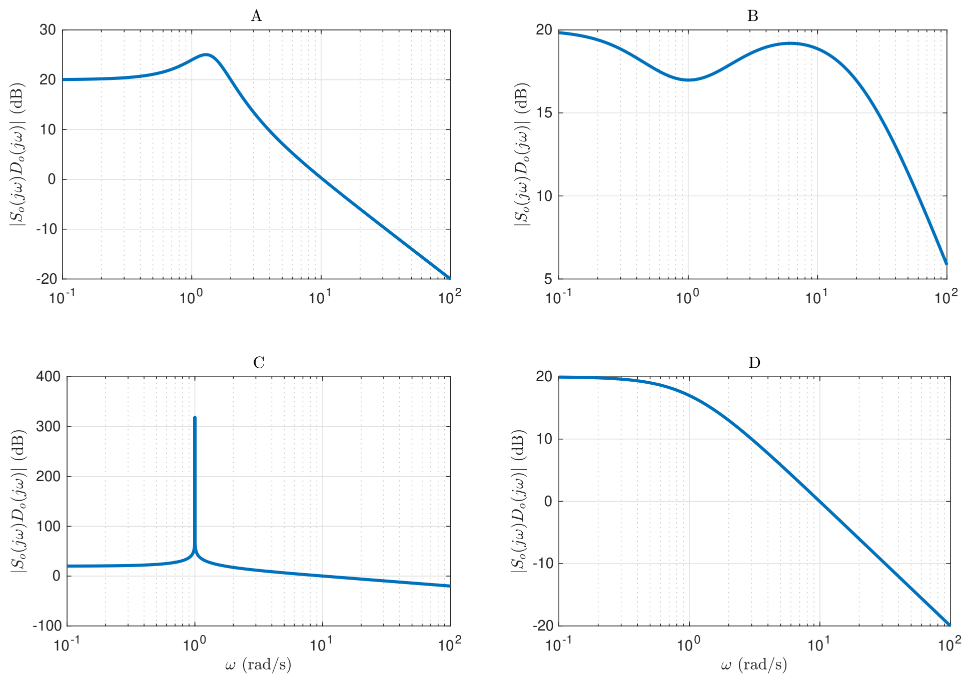

Abbildung 1: Mögliche Amplitudenverläufe der Störantwort für verschiedene τ (Aufgabe 4d)