Klausur: Regelungs- und Systemtechnik 3

Sommer 2021

Hörsaal 2

Mittwoch, den 15. 09. 2021

Beginn: 08.00 Uhr

Bearbeitungszeit: 120 Min

Modalitäten

- Als Hilfsmittel sind **nur** handschriftliche Aufzeichnungen, Kopien der Vorlesungs- und Übungsunterlagen sowie Übungsklausuren zugelassen.
- Bitte schreiben Sie mit dokumentenechtem Schreibgerät (Tinte oder Kugelschreiber).
- Zur Lösung der Aufgaben ist der freie Platz nach den jeweiligen Aufgaben vorgesehen; bei Bedarf werden Ihnen Zusatzblätter ausgehändigt.
- Für alle Berechnungen sind die **Lösungswege** darzustellen. Die alleinige Angabe eines Ergebnisses wird als Lösung nicht bewertet.

Name: ______________________

Matr.-Nr.: ______________________ Abgabe: ________

Studiengang: ______________________ Zusatzblätter: ____

Aufgabe	1	2	3	4		Σ
max. Punkte	10	19	12	20		61
erreichte Punkte						
					Note	

Aufgabe 1

10 Punkte

Die Übertragungsfunktionen eines Systems ist gegeben als

$$G(s) = \begin{pmatrix} \frac{s}{s^2 - a^2} & \frac{s}{s-1} \\ \frac{1}{s+1} & 1 \end{pmatrix}.$$

a) Zunächst sei $a \in \mathbb{R}$. Bestimmen Sie die Systemmatrizen A, B, C, D einer Gilbert-Realisierung für die Übertragungsfunktion $G(s)$.

b) Sei nun $a^2 = -1$, d.h. es gilt $a = \pm j$. Bestimmen Sie die Transformationsmatrix T für eine Ähnlichkeitstransformation $\bar{A} = T\,A\,T^{-1}$ so, dass $\bar{A}$ reell ist.

c) Welche freien Parameter im Verfahren können Sie nutzen, damit auch die übrigen transformierten Systemmatrizen reell sind? (kurze Begründung reicht, keine Rechnung notwendig)

Aufgabe 2 **19 Punkte**

Gegeben sei die Regelstrecke

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t)\\ y(t) &= Cx(t)\end{aligned}$$

mit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 5 \\ -2 & 2 & -10 \\ 4 & 2 & -2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

a) Bestimmen Sie die Eigenwerte von A.

b) Ist das Paar (C, A) beobachtbar? Ist es detektierbar?

c) Zerlegen Sie das System in einen beobachtbaren und nicht-beobachtbaren Anteil, d.h. gemäß

$$\begin{aligned}\dot{\tilde{x}}(t) &= \begin{pmatrix} A_{11} & 0 \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \tilde{x}(t) + \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \end{pmatrix} u(t)\\ y(t) &= \begin{pmatrix} C_1 & 0 \end{pmatrix} \tilde{x}(t),\end{aligned}$$

und bestimmen Sie die Matrizen A_{11}, A_{21}, A_{22}, B_1, B_2 und C_1.

Betrachtet wird das Beobachtersystem

$$\begin{aligned}\dot{\hat{x}}(t) &= \begin{pmatrix} A_{11} & 0 \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \hat{x}(t) + \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \end{pmatrix} u(t) + L(\hat{y}(t) - y(t))\\ \hat{y}(t) &= \begin{pmatrix} C_1 & 0 \end{pmatrix} \hat{x}(t)\end{aligned}$$

d) Sei $e(t) = \hat{x}(t) - \tilde{x}(t)$ der Beobachterfehler. Berechnen Sie die Beobachterverstärkung L so, dass die Eigenwerte der Beobachterfehlerdynamik bei -2 (mehrfach) liegen.

e) Geben Sie die Übertragungsfunktion $G(s)$ der Regelstrecke an.

Hinweis: Nutzen Sie das transformierte System.

Aufgabe 3 **12 Punkte**

Gegeben ist das um einen Integrierzustand x_I erweiterte, zeitkontinuierliche System

$$\begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{x}_\mathrm{I}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ x_\mathrm{I}(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} u(t)$$
$$y(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} x(t)$$

sowie Wichtungsmatrizen

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c^2 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad R = 1$$

mit $c > 0$.

a) Geben Sie c so an, dass eine positiv definite, stabilisierende Lösung der Matrix-Riccati-Gleichung

$$A^\top X + XA + Q - XBR^{-1}B^\top X = 0$$

existiert.

b) Zeigen Sie, dass für $c = 1$ die Matrix $X = \begin{pmatrix} 2a & a & -a \\ a & a-1 & -1 \\ -a & -1 & a \end{pmatrix}$ mit $a = 1 + \sqrt{2}$ eine Lösung ist.

Betrachtet wird nun das System

$$\dot{x}(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} x(t) + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} u(t)$$
$$y(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} x(t).$$

c) Bestimmen Sie für $R = 1$ und $Q = 0$ die Stellgröße u, welche das System stabilisiert und das Gütefunktional

$$J = \int_0^\infty x^\top(\tau) Q x(\tau) + u^\top(\tau) R u(\tau) \mathrm{d}\tau$$

minimiert.

Hinweis: Eine ausführliche Rechnung ist hier nicht notwendig.

Aufgabe 4 **20 Punkte**

Betrachten Sie den Regelkreis in Abbildung 1 mit den Reglerparametern $k_1, k_2 \in \mathbb{R}$.

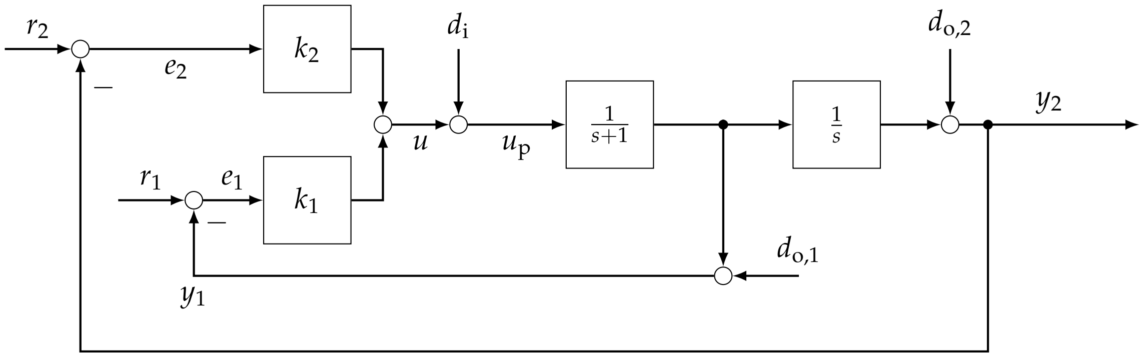

Abbildung 1: Blockschaltbild des Regelkreises.

a) Bestimmen Sie die Übertragungsmatrizen $K(s)$ und $P(s)$ bzgl. des Standardregelkreises, so dass

$$u = K(s)\begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = P(s)\, u_\mathrm{p} + \begin{pmatrix} d_{\mathrm{o},1} \\ d_{\mathrm{o},2} \end{pmatrix}.$$

b) Gehören K und P jeweils zu $\mathcal{RH}_\infty$? Begründen Sie ihre Antwort.

c) Ist der Regelkreis wohlgeformt?

Hinweis: $\hat{K} = -K$

d) Bestimmen Sie die ausgangsseitige Störsensitivität $S_\mathrm{o}(s)$. Welche Bedingungen müssen k_1 und k_2 erfüllen, damit S_o zu $\mathcal{RH}_\infty$ gehört? Ist der Regelkreis unter den Bedingungen intern stabil?

Hinweis: $s^3 + (2+a)s^2 + (1+a+b)s + b = (s^2 + (1+a)s + b)(s+1)$

Es werden nun ein Perfomance-Eingang w und ein Performance-Ausgang z sowie skalare Gewichtungsfunktionen $W_u, W_y \in \mathcal{RH}_\infty$ eingeführt:

$$w := \begin{pmatrix} d_{\mathrm{o},1} \\ d_{\mathrm{o},2} \\ d_\mathrm{i} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_\mathrm{o} \\ d_\mathrm{i} \end{pmatrix}, \qquad z := \begin{pmatrix} W_y\, y_2 \\ W_u\, u_\mathrm{p} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} W_y\, e_2^\top\, y \\ W_u\, u_\mathrm{p} \end{pmatrix}.$$

e) Zeichnen Sie die Blöcke W_y und W_u in Abbildung 1 ein. Das Übertragungsverhalten von w nach z sei durch $z = T_{zw} w$ beschrieben. Geben Sie die Matrix T_{zw} symbolisch in Abhängigkeit von $S_\mathrm{o}, S_\mathrm{i}, W_y, W_u, K$ und P an.

f) In Abbildung 2 ist der Verlauf der Singulärwerte $\sigma(T_{zw})$ für $k_1 = -0,5$ und vier verschiedene Werte von k_2 dargestellt. Welches der gegebenen k_2 garantiert interne Stabilität bei im Vergleich geringster $\mathcal{L}_2$-Verstärkung von w nach z?

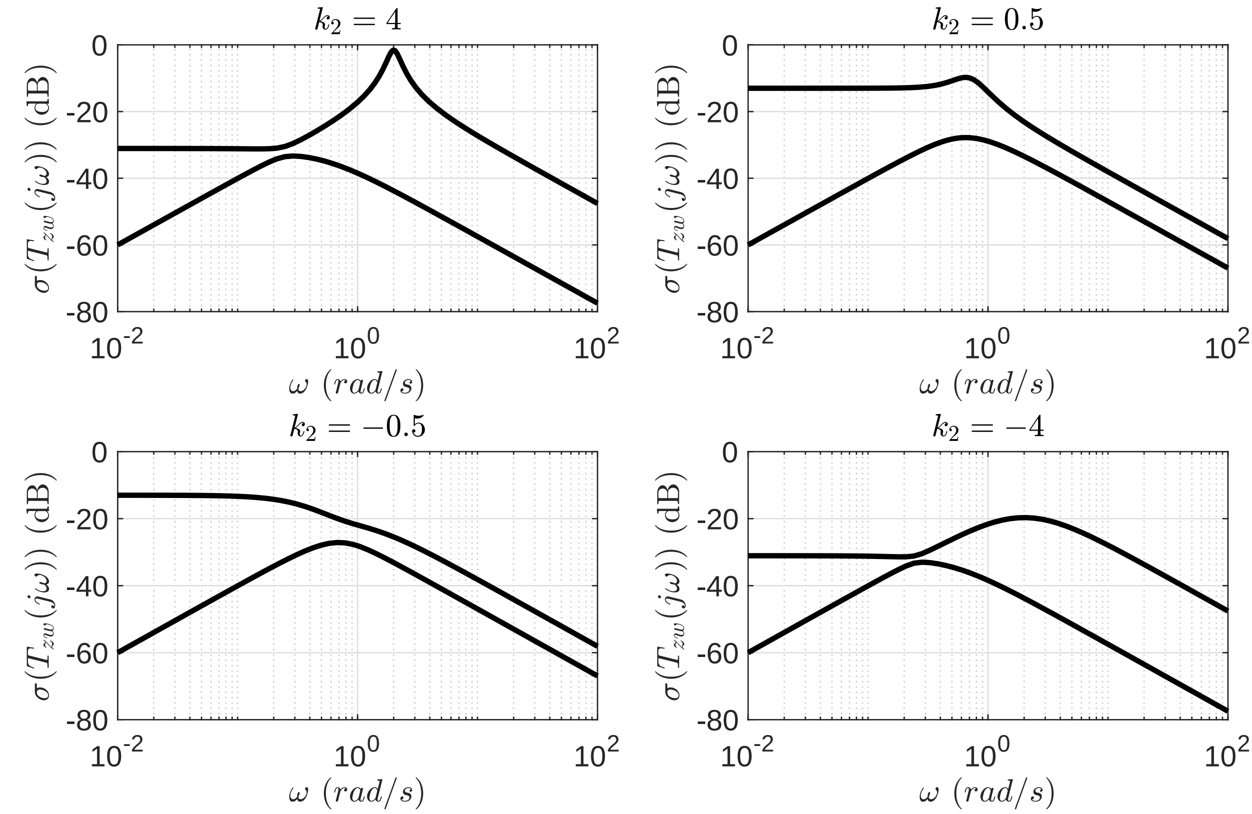

Abbildung 2: Verlauf der Singulärwerte $\sigma(T_{zw}(j\omega))$ für $k_1 = -0.5$ und $k_2 \in \{4, 0.5, -0.5, -4\}$.