Fachgebiet Regelungstechnik
Leiter: Prof. Dr.-Ing. Johann Reger

TECHNISCHE UNIVERSITÄT ILMENAU

Klausur: Regelungs- und Systemtechnik 3

Winter 2021/2022

Leonardo-da-Vinci-Hörsaal 1
Mittwoch, den 23. 03. 2021
Beginn: 13.00 Uhr
Bearbeitungszeit: 120 Min

Modalitäten

- Als Hilfsmittel sind **nur** handschriftliche Aufzeichnungen, Kopien der Vorlesungs- und Übungsunterlagen sowie Übungsklausuren zugelassen.
- Bitte schreiben Sie mit dokumentenechtem Schreibgerät (Tinte oder Kugelschreiber).
- Zur Lösung der Aufgaben ist der freie Platz nach den jeweiligen Aufgaben vorgesehen; bei Bedarf werden Ihnen Zusatzblätter ausgehändigt.
- Für alle Berechnungen sind die **Lösungswege** darzustellen. Die alleinige Angabe eines Ergebnisses wird als Lösung nicht bewertet.

Name: ______________________

Matr.-Nr.: ______________________

Studiengang: ______________________

Abgabe: ________

Zusatzblätter: ____

Aufgabe	1	2	3	4		Σ
max. Punkte	21	13	12	10		56
erreichte Punkte						
					Note	

Aufgabe 1 **21 Punkte**

Ein System Σ sei gegeben als Zustandsdarstellung

$$\Sigma : \begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) \end{cases}$$

mit

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

a) Bestimmen Sie die Übertragungsmatrix $G(s)$ des Systems Σ.

   Hinweis: $\begin{pmatrix} E & 0 \\ F & H \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} E^{-1} & 0 \\ -H^{-1}FE^{-1} & H^{-1} \end{pmatrix}$, falls E und H invertierbar.

b) Bringen Sie $G(s)$ in die Form $G(s) = \frac{1}{d(s)}P(s)$ mit Polynommatrix $P(s)$. Bestimmen Sie zu $P(s)$ die Smith-Normalform $S(s)$.

   Hinweis: Sie müssen keine Transformationsmatrizen berechnen.

c) Bestimmen Sie die Smith-McMillan Form von $G(s)$. Geben Sie die Pol- und Nullstellen des Systems an.

Betrachten Sie das System Σ nun wieder in der Zustandsdarstellung.

d) Bestimmen Sie die Steuerbarkeitsmatrix und die Steuerbarkeitsindizes des Systems Σ. Ist das System steuerbar?

e) Zerlegen Sie das System in einen steuerbaren und nicht-steuerbaren Anteil gemäß

$$\tilde{\Sigma} : \begin{cases} \dot{\tilde{x}}(t) = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{pmatrix} \tilde{x}(t) + \begin{pmatrix} B_1 \\ 0 \end{pmatrix} u(t) \\ y(t) = \begin{pmatrix} C_1 & C_2 \end{pmatrix} \tilde{x}(t), \end{cases}$$

   d.h. bestimmen Sie geeignete Matrizen A_{11}, A_{12}, A_{22}, B_1, C_1 und C_2.

   Hinweis: Ein Einheitsvektor im $\mathbb{R}^4$ ist linear unabhängig zu den Spalten der Steuerbarkeitsmatrix.

f) Betrachten Sie nun Σ und dessen Zerlegung $\tilde{\Sigma}$ als Realisierungen von $G(s)$ aus Aufgabenteil a). Sind diese Realisierungen minimal? Falls dies nicht der Fall ist, finden Sie eine minimale Realisierung.

Aufgabe 2

13 Punkte

Gegeben ist das System

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) + B_d\,d(t)\\ y(t) &= Cx(t)\end{aligned}$$

mit Zustand $x(t) \in \mathbb{R}^4$, Eingang $u(t) \in \mathbb{R}^2$ Ausgang $y(t) \in \mathbb{R}^2$, externer Störung $d(t) \in \mathbb{R}$ und den Systemmatrizen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad B_d = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

a) Ist das Paar (A, B) steuerbar?

Bei der Regelung wird der Integrierzustand $w(t) = \int_0^t x_1(\tau)\mathrm{d}\tau$ eingeführt.

b) Betrachten Sie den um den Integrierzustand $w(t)$ erweiterten Zustandsvektor $\bar{x}^\top(t) = (w\ \ x^\top(t))$. Berechnen Sie die Dynamikmatrix $\bar{A}$, Eingangsmatrix $\bar{B}$ und Störeingangsmatrix $\bar{B}_d$ für die erweiterte Zustandsgleichung $\dot{\bar{x}}(t) = \bar{A}\bar{x}(t) + \bar{B}u(t) + \bar{B}_d\,d(t)$.

Zur Regelung wird nun das Regelgesetz $u(t) = Kx(t) + K_\mathrm{I}w(t)$ verwendet, wobei $K \in \mathbb{R}^{2\times 4}$, $K_\mathrm{I} \in \mathbb{R}^2$.

c) Berechnen Sie die Matrizen K und K_I des Reglers so, dass für das Teilsystem zum Ausgang $y_1(t)$ alle Eigenwerte bei -2 liegen und für das Teilsystem zum Ausgang $y_2(t)$ alle Eigenwerte bei -1 liegen.

   Hinweis: Bringen Sie das System zunächst in eine entkoppelte Regelungsnormalform.

d) Sei nun die Störung $d(t) \equiv 4$ konstant. Berechnen Sie die stationären Zustände $\lim_{t\to\infty} x(t)$ und $\lim_{t\to\infty} w(t)$ des geregelten Systems, falls die Grenzwerte existieren.

Aufgabe 3

12 Punkte

Gegeben sei das System

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t)\\ y(t) &= Cx(t)\end{aligned}$$

mit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & -1 \end{pmatrix}$$

sowie die algebraische Riccatigleichung (ARG):

$$YA^\top + AY + W - \frac{1}{2} YC^\top CY = 0 \quad \text{mit} \quad W = \begin{pmatrix} w_1^2 & 0 \\ 0 & w_2^2 \end{pmatrix}.$$

a) Ist das Paar (C, A) beobachtbar? Ist es detektierbar?

b) Welche Bedingungen müssen an die Parameter $w_1, w_2 \in \mathbb{R}$ gestellt werden, damit die ARG eine Lösung $Y = Y^\top \geq 0$ besitzt? Kann hier auch eine (strikt) positiv definite Lösung existieren?

c) Berechnen Sie die positiv semidefinite Lösung $Y = \mathrm{diag}(p_1, p_2) \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ der ARG für die spezielle Wahl $(w_1, w_2) = (-\sqrt{5/2}\,, 0)$.

Hinweis: Falls Sie Aufgabenteil c) nicht gelöst haben, verwenden Sie von nun an $Y = \mathrm{diag}(2, 1)$.

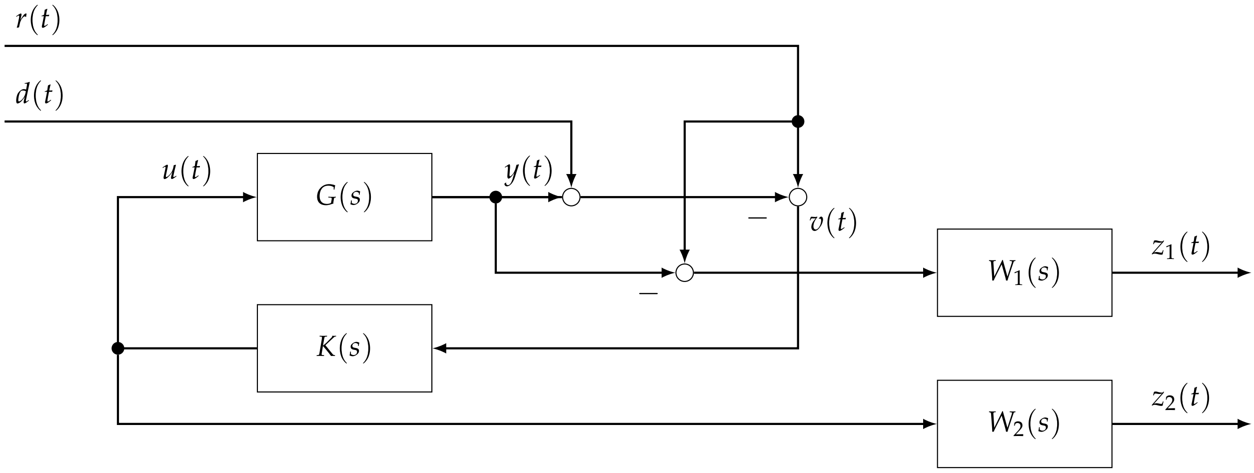
d) Geben Sie das Beobachtersystem des Kalman-Bucy-Filters an und bestimmen Sie die entsprechende Verstärkung.

e) Berechnen Sie die Eigenwerte der Beobachterfehlerdynamik für $e = x - \hat{x}$ und beurteilen Sie deren Stabilität.

Aufgabe 4

10 Punkte

Gegeben ist die folgende Regelkreisarchitektur:



a) Sei $w^\top = (r \;\; d)$. Bestimmen Sie die Übertragungsfunktion $P(s)$ von $\begin{pmatrix} w \\ u \end{pmatrix}$ nach $\begin{pmatrix} z \\ v \end{pmatrix}$ in Abhängigkeit der Übertragungsfunktionen $G(s)$, $W_1(s)$ und $W_2(s)$.

b) Wie unterscheidet sich für $r = 0$ diese Regelkreisarchitektur vom S/KS-Mixed-Sensitivity-Ansatz?

c) Bestimmen Sie die Übertragungsfunktion $T_{zw}(s)$ des mit $K(s)$ geschlossenen Regelkreises von w nach z unter Anwendung der Möbiustransformation $\mathcal{F}_l(P, K)$.