Klausur: Regelungs- und Systemtechnik 3

Sommer 2022

Helmholtz-Hörsaal
Freitag, den 29. 07. 2022
Beginn: 13.00 Uhr
Bearbeitungszeit: 120 Min

Modalitäten

- Als Hilfsmittel sind **nur** handschriftliche Aufzeichnungen, Kopien der Vorlesungs- und Übungsunterlagen sowie Übungsklausuren zugelassen.
- Bitte schreiben Sie mit dokumentenechtem Schreibgerät (Tinte oder Kugelschreiber).
- Zur Lösung der Aufgaben ist der freie Platz nach den jeweiligen Aufgaben vorgesehen; bei Bedarf werden Ihnen Zusatzblätter ausgehändigt.
- Für alle Berechnungen sind die **Lösungswege** darzustellen. Die alleinige Angabe eines Ergebnisses wird als Lösung nicht bewertet.

Name: ______________________

Matr.-Nr.: ______________________ Abgabe: ________

Studiengang: ______________________ Zusatzblätter: ____

Aufgabe	1	2	3	4		Σ
max. Punkte	14	21	12	12		59
erreichte Punkte						
					Note	

Aufgabe 1 **14 Punkte**

Die Übertragungsfunktionen eines Systems ist gegeben als

$$G(s) = \begin{pmatrix} 0 & \dfrac{2s-3}{s^2+7s+12} \\ 0 & \dfrac{-s+2}{s^2+7s+12} \\ \dfrac{1}{s+2} & \dfrac{s+1}{s^2+7s+12} \end{pmatrix}.$$

a) Bestimmen Sie die Systemmatrizen A, B, C, D einer Gilbert-Realisierung für die Übertragungsfunktion $G(s)$. Ist die Realisierung minimal?

b) Bestimmen Sie die Smith-McMillan-Form von $G(s)$.

c) Hat das System Übertragungsnullstellen? Welche Pole hat $G(s)$? Ist das System BIBO-stabil?

Aufgabe 2 **21 Punkte**

Gegeben sei das System

$$\Sigma : \begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) \end{cases}$$

mit

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

a) Ist das System detektierbar?

b) Bestimmen Sie die Steuerbarkeitsindizes des Systems. Ist das System steuerbar?

c) Zerlegen Sie das System in einen steuerbaren und nicht-steuerbaren Anteil gemäß

$$\tilde{\Sigma} : \begin{cases} \dot{\tilde{x}}(t) = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{pmatrix} \tilde{x}(t) + \begin{pmatrix} B_1 \\ 0 \end{pmatrix} u(t) \\ y(t) = \begin{pmatrix} C_1 & C_2 \end{pmatrix} \tilde{x}(t) \end{cases}$$

d.h. bestimmen Sie geeignete Matrizen A_{11}, A_{12}, A_{22}, B_1, C_1 und C_2.

Hinweis: Ein Einheitsvektor im $\mathbb{R}^4$ ist linear unabhängig zu den Spalten der Steuerbarkeitsmatrix.

d) Bestimmen Sie die Übertragungsfunktion $G(s)$ des Systems Σ.

Hinweis: $\begin{pmatrix} E & F \\ 0 & H \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} E^{-1} & -E^{-1}FH^{-1} \\ 0 & H^{-1} \end{pmatrix}$, falls E und H invertierbar.

e) Ist das gegebene System Σ eine minimale Realisierung von $G(s)$? Ist das transformierte System $\tilde{\Sigma}$ aus Aufgabenteil c eine minimale Realisierung von $G(s)$? Falls weder Σ noch $\tilde{\Sigma}$ eine minimale Realisierung von $G(s)$ ist, finden Sie eine minimale Realisierung von $G(s)$.

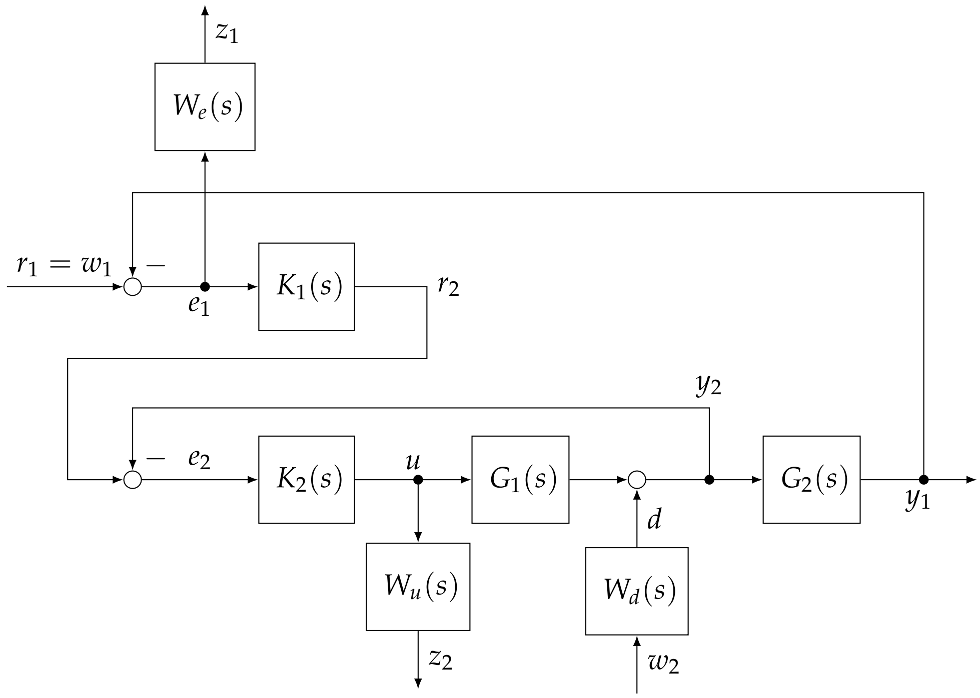
Hinweis: Eine minimale Realisierung kann auch ohne Rechnung bestimmt werden.

f) Kann das System Σ mit Hilfe einer SISO Ausgangsrückführung stabilisiert werden? Wenn ja, welche Eingangs-/Ausgangspaarung wird dabei verwendet?

Aufgabe 3

12 Punkte

Betrachtet wird die hier abgebildete Kaskaden-Regelkreisarchitektur



mit Strecken- und Reglerübertragungsfunktionen $G_1(s), G_2(s), K_1(s)$ und $K_2(s)$ gegeben als

$$G_1(s) = \frac{2s+3}{s+1}\,,\ G_2(s) = \frac{s+4}{2s+1}\,,\ K_1(s) = A\,,\ K_2(s) = \frac{s+1}{s}$$

sowie Gewichtungsfunktionen $W_e(s), W_u(s)$ und $W_d(s)$. Dabei stellen $y = [e_1, y_2]^\top$ den Messausgang, u das Stellsignal, $z = [z_1, z_2]^\top$ den Zielausgang und $w = [w_1, w_2]^\top$ den externen Eingang dar.

a) Bestimmen Sie den Regler $K(s)$, der das Übertragungsverhalten von y nach u beschreibt in Abhängigkeit der Übertragungsfunktionen $K_1(s)$ und $K_2(s)$.

b) Bestimmen Sie die Streckenübertragungsfunktion $\tilde{P}(s)$, die das Übertragungsverhalten von u nach y beschreibt in Abhängigkeit der Übertragungsfunktionen $G_1(s)$ und $G_2(s)$.

c) Für welche Werte von $A \in \mathbb{R}$ ist der entsprechende Regelkreis RK^+ bezüglich $\hat{K} = K$ und $\tilde{P}$ mit den gegebenen Übertragungsfunktionen nicht wohlgeformt.

   Hinweis: Es müssen keine Sensitivitäten berechnet werden.

d) Bestimmen Sie die verallgemeinerte Strecke $P(s)$, die das Übertragungsverhalten von $[w^\top, u]^\top$ nach $[z^\top, y^\top]^\top$ beschreibt abhängig von $G_1(s), G_2(s), W_e(s), W_u(s)$ und $G_d(s)$.

e) Bestimmen Sie die Übertragungsfunktion $T_{zw}(s)$ von w nach z im geschlossenen Regelkreis in Abhängigkeit der Übertragungsfunktionen $G_1(s), G_2(s), W_e(s), W_u(s)$ und $G_d(s)$.

Aufgabe 4

12 Punkte

Gegeben ist die Strecke mit

$$G(s) = \frac{2}{s^2 + 4\zeta\, s + 4}.$$

a) Skizzieren Sie den Amplitudengang von $G(\mathrm{j}\omega)$ für $\zeta \in \{0, 1\}$.

b) Zeigen Sie, dass gilt:

$$\|G(s)\|_\infty = \frac{1}{2}\,\frac{1}{2\zeta\sqrt{1-\zeta^2}} \qquad \text{für} \quad \zeta \in \left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right).$$

c) Bestimmen Sie die $\mathcal{H}_\infty$-Norm von $G(s)$ für $\zeta \geq 0$. Für welche ζ ist $G \notin \mathcal{RH}_\infty$?

Sei nun $\zeta = \frac{1}{2}$. Zur Regelung wird im Standardregelkreis ein PID-Regler der Form

$$C_{\mathrm{PID}}(s) = K\,\frac{s^2 + 2s + 4}{s(s+1)}$$

mit $K > 0$ genutzt.

d) Berechnen Sie die Führungsübertragungsfunktion des geschlossenen Regelkreises.

e) Bestimmen Sie die maximale Reglerverstärkung $K > 0$ so, dass die $\mathcal{H}_\infty$-Norm der Führungsübertragungsfunktion minimal wird.

Hinweis: Nutzen Sie die Ergebnisse aus den Teilaufgaben b und c.