Klausur: Regelungs- und Systemtechnik 3

Kirchhoff-Hörsaal 1
Mittwoch, den 22. 03. 2023
Beginn: 12.30 Uhr
Bearbeitungszeit: 120 Min

Modalitäten

- Als Hilfsmittel sind **nur** handschriftliche Aufzeichnungen, Kopien der Vorlesungs- und Übungsunterlagen sowie Übungsklausuren zugelassen.
- Bitte schreiben Sie mit dokumentenechtem Schreibgerät (Tinte oder Kugelschreiber).
- Zur Lösung der Aufgaben ist der freie Platz nach den jeweiligen Aufgaben vorgesehen; bei Bedarf werden Ihnen Zusatzblätter ausgehändigt.
- Für alle Berechnungen sind die **Lösungswege** darzustellen. Die alleinige Angabe eines Ergebnisses wird als Lösung nicht bewertet.

Name: ______________________

Matr.-Nr.: ______________________ Abgabe: ________

Studiengang: ______________________ Zusatzblätter: ____

Aufgabe	1	2	3	4		Σ
max. Punkte	13	12	17	12		54
erreichte Punkte						
					Note	

Klausur: Regelungs- und Systemtechnik 3

Aufgabe 1

13 Punkte

Gegeben sei das System

$$\Sigma : \begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) \end{cases}$$

mit

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

a) Bestimmen Sie die Steuerbarkeitsmatrix R und die Steuerbarkeitsindizes des Systems. Ist das System steuerbar?

b) Zerlegen Sie das System in einen steuerbaren und nicht-steuerbaren Anteil mit steuerbarem Anteil in Regelungsnormalform gemäß

$$\tilde{\Sigma} : \begin{cases} \dot{\tilde{x}}(t) = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{pmatrix} \tilde{x}(t) + \begin{pmatrix} B_1 \\ 0 \end{pmatrix} u(t) \\ y(t) = \begin{pmatrix} C_1 & C_2 \end{pmatrix} \tilde{x}(t), \end{cases}$$

d.h. bestimmen Sie geeignete Matrizen A_{11}, A_{12}, A_{22}, B_1, C_1 und C_2 so, dass (A_{11}, B_1) in Regelungsnormalform vorliegt.

Hinweis: Ein Einheitsvektor im $\mathbb{R}^4$ ist linear unabhängig zu den Spalten von R.

c) Ist das System Σ asymptotisch stabil? Ist es stabil?

d) Geben Sie ein stabilisierendes Regelgesetz $u = Kx$ so an, dass die Eigenwerte im geschlossenen Kreis nicht-positiven Realteil aufweisen.

Aufgabe 2

12 Punkte

Betrachten Sie die MIMO-Übertragungsfunktion

$$G(s) = \frac{1}{(s+1)^2(s+2)} \begin{pmatrix} 1 & -s & s+1 \\ 0 & 1 & s^2 \\ 0 & 0 & s^2+3s+2 \end{pmatrix},$$

die den Ausgang $Y(s) \bullet\!\!-\!\!\circ\, y(t) \in \mathbb{R}^3$ mit dem Eingang $U(s) \bullet\!\!-\!\!\circ\, u(t) \in \mathbb{R}^3$ gemäß $Y(s) = G(s)U(s)$ ausdrückt.

a) Bestimmen Sie die Smith-McMillan-Form $M(s)$ der Übertragungsfunktion $G(s)$.

   Hinweis: Verwenden Sie unimodulare Rechtstransformationen $R(s)$.

b) Geben Sie die Nullstellen und Pole von $G(s)$ an (kanalweise). Ist die Übertragungsfunktion $G(s)$ BIBO-stabil?

c) Betrachten Sie nun die Eingangstransformation $U(s) = K(s)V(s)$ mit dem neuen Eingang $V(s) \bullet\!\!-\!\!\circ\, v(t) \in \mathbb{R}^3$. Bestimmen Sie eine propere und stabile Übertragungsfunktion $K(s)$ so, daß $y_i = y_i(v_i)$ für $i = 1, 2, 3$ gilt, d.h. kanalweise Entkopplung erzielt wird.

Aufgabe 3

17 Punkte

Gegeben sei das System

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t)\\ y(t) &= Cx(t)\end{aligned}$$

mit

$$A = 1, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = 1,$$

sowie die algebraische Riccatigleichung (ARG):

$$A^\top X + XA + I - XBR^{-1}B^\top X = 0 \quad \text{mit} \quad R = \begin{pmatrix} r_1 & 0 \\ 0 & r_2 \end{pmatrix} > 0$$

zur Minimierung des Kostenfunktionals

$$J = \int_0^\infty \Big(x(t)^\top x(t) + u(t)^\top R\, u(t) \Big)\, \mathrm{d}t\,.$$

a) Ist das Paar (A, B) steuerbar? Ist es stabilisierbar?

b) Weisen Sie nach, dass die ARG eine stabilisierende, strikt positiv definite Lösung $X = X^\top$ besitzt.

c) Bestimmen Sie die Lösung X der ARG für $r_1 = 1, r_2 = \frac{1}{2}$. Wie lautet das minimierende Regelgesetz $u = u(x)$?

d) Berechnen Sie den Wert des Kostenfunktionals J mit der Zustandsrückführung aus Teilaufgabe c) für den Anfangswert $x(0) = -5$.

e) Bestimmen Sie das Vorfilter $F = \begin{pmatrix} 1 \\ f \end{pmatrix}$ im erweiterten Regelgesetz

$$u = Kx + (F + K)r$$

so, dass $y = r$ stationär gilt.

Aufgabe 4

12 Punkte

Gegeben ist das System

$$G(s) = \begin{pmatrix} \dfrac{s-1}{s+1}e^{-s} & 2e^{-s} \\ 0 & \dfrac{-s+2}{s+2}e^{-s} \end{pmatrix}.$$

a) Begründen Sie, ob G zu $\mathcal{H}_2, \mathcal{RH}_2, \mathcal{H}_\infty$ bzw. $\mathcal{RH}_\infty$ gehört.

b) Ermitteln Sie die Eigenwerte λ der Matrix $G^\top(-\mathrm{j}\omega)G(\mathrm{j}\omega)$.

c) Berechnen Sie die $\mathcal{H}_\infty$-Norm von G.

Hinweis: Falls Sie Teilaufgabe b) nicht lösen konnten, verwenden Sie das charakteristische Polynom $\lambda^2 - 10\lambda + 2$.

d) Geben Sie den maximalen und minimalen Singulärwert $\overline{\sigma}(\omega)$ bzw. $\underline{\sigma}(\omega)$ von G an.