Fachgebiet Regelungstechnik
Leiter: Prof. Dr.-Ing. Johann Reger

TECHNISCHE UNIVERSITÄT ILMENAU

Klausur: Regelungs- und Systemtechnik 3

Sommer 2023

Kirchhoff-Hörsaal 1
Donnerstag, den 10. 8. 2023
Beginn: 8.00 Uhr
Bearbeitungszeit: 120 Min

Modalitäten

- Als Hilfsmittel sind **nur** handschriftliche Aufzeichnungen, Kopien der Vorlesungs- und Übungsunterlagen sowie Übungsklausuren zugelassen.
- Bitte schreiben Sie mit dokumentenechtem Schreibgerät (Tinte oder Kugelschreiber).
- Zur Lösung der Aufgaben ist der freie Platz nach den jeweiligen Aufgaben vorgesehen; bei Bedarf werden Ihnen Zusatzblätter ausgehändigt.
- Für alle Berechnungen sind die **Lösungswege** darzustellen. Die alleinige Angabe eines Ergebnisses wird als Lösung nicht bewertet.

Name: ______________________

Matr.-Nr.: ______________________

Studiengang: ______________________

Abgabe: ________

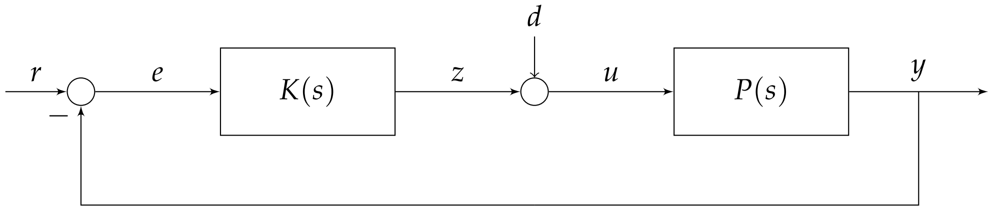
Zusatzblätter: ____

Aufgabe	1	2	3	4		Σ
max. Punkte	19	10	14	12		55
erreichte Punkte						
Note						

Aufgabe 1

19 Punkte

Gegeben sei das folgende System im geschlossenen Regelkreis



wobei

$$P : \begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) \end{cases} \qquad \text{und} \qquad K : \begin{cases} \dot{v}(t) = \tilde{A}v(t) + \tilde{B}e(t) \\ z(t) = \tilde{C}v(t) + \tilde{D}e(t) \end{cases}$$

mit Matrizen der Strecke

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

und Matrizen des Reglers

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 0 \end{pmatrix}, \quad \tilde{B} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \tilde{C} = \begin{pmatrix} b \\ -b \end{pmatrix}, \quad \tilde{D} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix},$$

konstanter Referenz $r \in \mathbb{R}^2$ und Eingangsstörung $d \in \mathbb{R}^2$. Die Zahlen $a, b \in \mathbb{R}$ sind Parameter, die zum Einstellen des Reglers verwendet werden sollen. Im Folgenden wird die Zeitabhängigkeit der Übersichtlichkeit halber weggelassen.

a) Bezogen auf den Gesamteingang $\begin{pmatrix} r \\ d \end{pmatrix}$ und Gesamtausgang $\begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix}$ bestimmen Sie eine Zustandsdarstellung des geschlossenen Regelkreises G, d.h. Matrizen A_g, B_g, C_g und D_g gemäß

$$G : \begin{cases} \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{v} \end{pmatrix} = A_g \begin{pmatrix} x \\ v \end{pmatrix} + B_g \begin{pmatrix} r \\ d \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix} = C_g \begin{pmatrix} x \\ v \end{pmatrix} + D_g \begin{pmatrix} r \\ d \end{pmatrix} \end{cases}.$$

Hinweis: Beachten Sie $\tilde{D}D = D\tilde{D} = 0$.

b) Bestimmen Sie nun die Reglerparameter a und b so, dass die Eigenwerte im geschlossenen Regelkreis alle bei -1 liegen.

c) Ist das System im geschlossenen Regelkreis intern stabil?

d) Wie wirkt sich die kostante Störung $d = \begin{pmatrix} d_1 \\ -d_1 \end{pmatrix}$ auf den stationären Endwert des Ausgangs y bei Referenz $r \equiv 0$ aus?

e) Bringen Sie G in die Form RK^+ aus der Vorlesung, d.h. geben Sie $e_1, e_2, w_1, w_2, \hat{P}$ und $\hat{K}$ an.

f) Ist der Regelkreis wohlgeformt?

Aufgabe 2

10 Punkte

Gegeben ist die folgende Übertragungsfunktion

$$G(s) = \begin{pmatrix} \frac{3s+5}{(s+1)(s-1)} & 1 & 0 \\ \frac{s}{s+1} & 0 & \frac{1}{s^2} \end{pmatrix}$$

mit einem McMillan Grad von 4.

a) Welchem der Räume $\mathcal{H}_2$, $\mathcal{H}_\infty$, $\mathcal{RH}_2$ oder $\mathcal{RH}_\infty$ kann die Übertragungsfunktion zugeordnet werden?

b) Ist eine Gilbert-Realisierung für diese Übertragungsfunktion geeignet?

c) Bestimmen Sie eine geeignete Realisierung mit Hilfe der folgenden Zerlegung:

$$G(s) = D + \begin{pmatrix} G_1(s) \\ G_2(s) \end{pmatrix}.$$

Hinweis: Nutzen Sie die Beobachtungsnormalform.

d) Ist diese Realisierung minimal?

Aufgabe 3 **14 Punkte**

Betrachten Sie das durchgriffsfreie System

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} u + \omega_d \\ y &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} x + \omega_n \end{aligned}$$

mit bekannter Kovarianz $V = 1$ bzgl. des Messrauschens ω_n.

a) Die Kovarianzmatrix W bzgl. ω_d ging verloren. Sie erinnern sich aber, dass W eine Diagonalmatrix ist. Wie müssen Sie deren Einträge wählen, daß das Entwurfsproblem eines Kalman-Filters lösbar ist?

b) Identifizieren Sie die üblichen Systemmatrizen A, B und C und bestimmen Sie für den Fall $W = 3\,I$ die positiv semidefinite Lösung Y der algebraischen Riccati-Gleichung

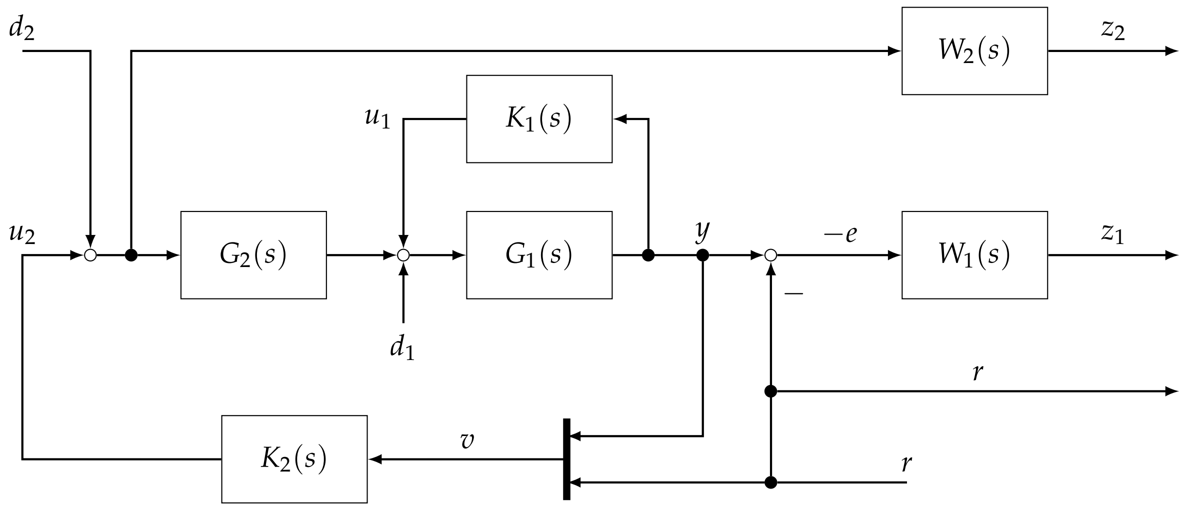
$$Y\,A^\top + A\,Y + W - YC^\top V^{-1} C Y = 0.$$

c) Bestimmen Sie die Beobachterverstärkung K_f des Kalman-Filters.

d) Geben Sie die Beobachterfehlerdynamik an. Konvergiert der Zustand des Beobachters zu null?

Aufgabe 4 **12 Punkte**

Gegeben ist der Regelkreis



mit

$$G_1(s) = \frac{s+1}{s-1} \quad \text{und} \quad G_2(s) = \frac{2s-2}{s+2}.$$

Seien $u^\top = \begin{pmatrix} u_1 & u_2 \end{pmatrix}$, $d^\top = \begin{pmatrix} d_1 & d_2 \end{pmatrix}$, $z^\top = \begin{pmatrix} z_1 & z_2 \end{pmatrix}$, $w^\top = \begin{pmatrix} r & d^\top \end{pmatrix}$ und $v^\top = \begin{pmatrix} r & y \end{pmatrix}$.

a) Bestimmen Sie den Regler $K(s)$ in Abhängigkeit von $K_1(s)$, $K_2(s) = \begin{pmatrix} K_{21}(s) & K_{22}(s) \end{pmatrix}$, der das Übertragungsverhalten von v nach u bestimmt.

b) Bestimmen Sie die Strecke $\tilde{P}(s)$, die das Übertragunsverhalten von u nach v beschreibt.

c) Wählen Sie nun

$$K_1(s) = c_1 \frac{1-s}{2s}, \quad K_{21}(s) = \frac{1}{s} \quad \text{und} \quad K_{22}(s) = \frac{(c_2 s + 1)(s+1)}{s^2 - 1}.$$

Schränken Sie die Wahl von $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ so ein, dass der Regelkreis RK^+ aus $\hat{K} = K$ und $\tilde{P}$ wohlgeformt ist.

d) Bestimmen Sie die verallgemeinerte Strecke $P(s)$ mit

$$\begin{pmatrix} z \\ v \end{pmatrix} = P(s) \begin{pmatrix} w \\ u \end{pmatrix}$$

abhängig von den Variablen $G_1(s)$, $G_2(s)$, $W_1(s)$, $W_2(s)$.

e) Es gilt nun $d_1 \equiv 0$. Wie sollten die Wichtungsfunktionen $W_1(s)$ und $W_2(s)$ gewählt werden, um

- gutes Führungsverhalten für sprungförmige Referenzgrößen,
- Unterdrückung von hochfrequentem Messrauschen d_2 sowie
- Begrenzung der Bandbreite von K_2 wegen eines langsamen Aktuators

im $\mathcal{H}_\infty$-Reglerentwurf zu gewährleisten?

Charakterisieren Sie W_1 und W_2 jeweils als Hochpass oder Tiefpass. Begünden Sie Ihre Wahl.