Fachgebiet Regelungstechnik
Leiter: Prof. Dr.-Ing. Johann Reger

TECHNISCHE UNIVERSITÄT ILMENAU

Klausur: Regelungs- und Systemtechnik 3/ Regelung mechatronischer Systeme

Sommer 2018

Hörsaal 2

Freitag, den 03. 08. 2017

Beginn: 08.00 Uhr

Bearbeitungszeit: 120 Min

Modalitäten

- Als Hilfsmittel sind **nur** handschriftliche Aufzeichnungen, Kopien der Vorlesungs- und Übungsunterlagen sowie Übungsklausuren zugelassen.
- Bitte schreiben Sie mit dokumentenechtem Schreibgerät (Tinte oder Kugelschreiber).
- Zur Lösung der Aufgaben ist der freie Platz nach den jeweiligen Aufgaben vorgesehen; bei Bedarf werden Ihnen Zusatzblätter ausgehändigt.
- Für alle Berechnungen sind die **Lösungswege** darzustellen. Die alleinige Angabe eines Ergebnisses wird als Lösung nicht bewertet.

Name: ____________________

Matr.-Nr.: ____________________ Abgabe: ________

Studiengang: ____________________ Zusatzblätter: ____

Aufgabe	1	2	3	4		Σ
max. Punkte	21	16	15	13		65
erreichte Punkte						
					Note	

Aufgabe 1

21 Punkte

Gegeben sei das System

$$\begin{aligned}\dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx\end{aligned}$$

mit

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

a) Bestimmen Sie die Eigenwerte von A.

b) Zeigen Sie, dass das Paar (A, C) nicht beobachtbar, aber detektierbar ist.

c) Zerlegen Sie das System in einen beobachtbaren und nicht-beobachtbaren Anteil, d.h. in

$$\begin{aligned}\dot{\tilde{x}} &= \begin{pmatrix} A_{11} & 0 \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \tilde{x} + \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \end{pmatrix} u \\ y &= \begin{pmatrix} C_1 & 0 \end{pmatrix} \tilde{x}.\end{aligned}$$

Bestimmen Sie die Matrizen A_{11}, A_{21}, A_{22}, B_1, B_2 und C_1.

d) Es soll ein Beobachter der Form

$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu + L(C\hat{x} - y)$$

entworfen werden. Berechnen Sie die Beobachterverstärkung L so, dass die Eigenwerte der Beobachterfehlerdynamik $\dot{e} = (A + LC)e$ zum Schätzfehler $e = \hat{x} - x$ bei -1, -1 und -2 liegen.

e) Bestimmen Sie die Übertragungsfunktion $G(s)$ des Systems.

Hinweis: Nutzen Sie die transformierte Form des Systems.

Aufgabe 2

16 Punkte

Wir betrachten die Übertragungsfunktion

$$G(s) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{s(s+2)}{(s+1)^2} & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{(s-1)}{s^2(s+10)} \end{pmatrix}.$$

a) Geben Sie den McMillan-Grad von $G(s)$ an.

b) Geben Sie die Dimensionen der Matrizen A, B, C, D einer minimalen Realisierung an.

c) Bestimmen Sie eine minimale Realisierung.

d) Ist $G \in \mathcal{RH}_2$ bzw. $G \in \mathcal{RH}_\infty$? (Begründung)

Aufgabe 3

15 Punkte

Eine Anordnung verschiedener Sensoren sei gegeben durch das System

$$\dot{x}(t) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} u + w_d$$
$$y = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} x + w_n$$

Zum Entwurf eines Kalman-Bucy-Filters betrachten wir nun die Riccatigleichung

$$YA^\top + AY + W - YC^\top V^{-1} CY = 0$$

mit den Kovarianzmatrizen $V = W = \mathrm{diag}(2,\ 1)$.

a) Existiert eine positiv semidefinite bzw. positiv definite Lösung der Riccatigleichung?

b) Geben Sie die Gleichungen des Kalman-Bucy-Filters in allgemeiner Form an.

c) Berechnen Sie die Verstärkung des Kalman-Bucy-Filters.

Aufgabe 4

13 Punkte

Betrachten Sie die SISO-Übertragungsfunktion

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = G(s) = K\,\frac{1}{s^2 + 2as + a^2}$$

mit $K > 0$ und $a > 0$.

a) Bestimmen Sie die kleinste positive Zahl c_1 so, dass

$$\|y\|_2 \leq c_1\,\|u\|_2$$

für beliebige $u \in \mathcal{L}_2$ gilt.

b) Berechnen Sie die zu $G(s)$ gehörende Impulsantwort $g(t)$, d.h. $g(t) \;\circ\!\!-\!\!\bullet\; G(s)$.

c) Bestimmen Sie die kleinste positive Zahl c_2 so, dass

$$\|y\|_\infty \leq c_2\,\|u\|_\infty$$

für beliebige $u \in \mathcal{L}_\infty$ gilt.

Hinweis: Für $a > 0$ gilt der Zusammenhang $\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{s+a}\right) \;\bullet\!\!-\!\!\circ\; (-t)e^{-at}$.