Regelungs- und Systemtechnik 3 — Übung 2

Sommer 2016

Aufgabe 1

Wir betrachten einige Rechenregeln für Blockmatrizen der Art

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}, \quad A_{11} \in \mathbb{R}^{n\times n}, A_{12} \in \mathbb{R}^{n\times m}, A_{21} \in \mathbb{R}^{m\times n}, A_{22} \in \mathbb{R}^{m\times m}, A \in \mathbb{R}^{(n+m)\times(n+m)}$$

anhand des Schur-Komplements.

a) Für invertierbares A_{11} gilt

$$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & 0 \\ \star & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{11} & 0 \\ 0 & \Delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & \star \\ 0 & I \end{pmatrix}$$

mit dem sogenannten Schur-Komplement $\Delta := A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12}$.

Ist A_{22} invertierbar, dann gilt

$$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & \star \\ 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{\Delta} & 0 \\ 0 & A_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & 0 \\ \star & I \end{pmatrix}$$

mit dem Schur-Komplement $\hat{\Delta} := A_{11} - A_{12}A_{22}^{-1}A_{21}$.

Berechnen Sie die fehlenden Elemente "$\star$" in den Matrizen. Geben Sie in beiden Fällen eine einfache Formel zur Auswertung der Determinante und der Eigenwerte von A an.

b) Seien A, Δ und $\hat{\Delta}$ invertierbar. Berechnen Sie A^{-1} mit Hilfe des Schur-Komplements Δ sowie mit Hilfe des Schur-Komplements $\hat{\Delta}$ anhand der Formeln in Teilaufgabe a.

c) Wie vereinfacht sich das Ergebnis für die Matrixinversen in b, wenn im Falle des Schur-Komplements Δ die Blockmatrix

$$\begin{pmatrix} A_{11} & 0 \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}$$

und im Falle des Schur-Komplements $\hat{\Delta}$ die Blockmatrix

$$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{pmatrix}$$

verwendet werden?

Aufgabe 2

Es werden nun die Summe und das Produkt von Übertragungsfunktion und die Führungsübertragungsfunktion betrachtet sowie eine zugehörige Realisierung.

a) Berechnen Sie für Übertragungsmatrizen $G(s)$ und $K(s)$ passender Dimension

$$\tilde{G}(s) = G(s)K(s) = \left[\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array}\right] \left[\begin{array}{c|c} A_K & B_K \\ \hline C_K & D_K \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c} \star & \star \\ \hline \star & \star \end{array}\right].$$

b) Berechnen Sie für Übertragungsmatrizen $G_1(s)$ und $G_2(s)$ gleicher Dimension

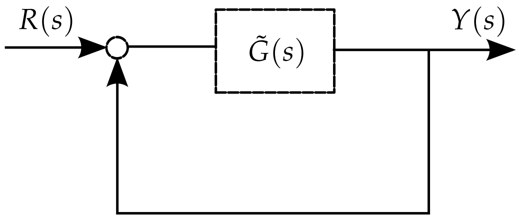
$$G_1(s) + G_2(s) = \left[\begin{array}{c|c} A_1 & B_1 \\ \hline C_1 & D_1 \end{array}\right] + \left[\begin{array}{c|c} A_2 & B_2 \\ \hline C_2 & D_2 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c} \star & \star \\ \hline \star & \star \end{array}\right].$$

c) Berechnen Sie

$$G^{-1}(s) = \left[\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array}\right]^{-1} = \left[\begin{array}{c|c} \star & \star \\ \hline \star & \star \end{array}\right],$$

wobei D als invertierbar angenommen werden soll.

d) Folgendes Blockschaltbild ist gegeben:



Berechnen Sie

$$T(s) = (I - \tilde{G}(s))^{-1}\tilde{G}(s) = \left[\begin{array}{c|c} \star & \star \\ \hline \star & \star \end{array}\right].$$

e) Ein beobachtbares System sei in einer Zerlegung in steuerbare und nichtsteuerbare Anteile gegeben:

$$\begin{aligned} \dot{\bar{x}} &= \begin{pmatrix} \bar{A}_{\mathrm{R}} & \bar{A}_{\mathrm{R}\bar{\mathrm{R}}} \\ 0 & \bar{A}_{\bar{\mathrm{R}}} \end{pmatrix} \bar{x} + \begin{pmatrix} \bar{B}_{\mathrm{R}} \\ 0 \end{pmatrix} u \\ y &= (\bar{C}_{\mathrm{R}}\ \bar{C}_{\bar{\mathrm{R}}})\, \bar{x} + Du. \end{aligned}$$

Berechnen Sie die Übertragungsfunktion $G(s)$.