# Digitale Regelungssysteme - Versuchsanleitung 2

## Digitale Regelung eines inversen Pendels

### Voraussetzungen

Voraussetzungen für die Vorbereitung und Durchführung des Versuchs sind Grundkenntnisse aus der Vorlesung Regelungs- und Systemtechnik 1 sowie die Lerninhalte der Vorlesungen 5 bis 8 im Fach Digitale Regelungssysteme mit den Themen:

- Steuerbarkeit, Erreichbarkeit, Transformation auf Regelungsnormalform
- Zustandsrückführung (Formel von Ackermann)
- Beobachtbarkeit, Rekonstruierbarkeit, Transformation auf Beobachternormalform
- Zustandsbeobachtung

### Lernziele

- Entwurf von zeitdiskreten Zustandsrückführungen und Zustandsbeobachtern
- Wirkung der Eigenwertlagen auf das Regelkreis-/Beobachterverhalten und Einfluss auf Führungs- und Störverhalten sowie Stellgrößenaufwand

### Zeitlicher Umfang

- Vorbereitung (4-10 Std.)
- Durchführung (3 Std.)

| | | |
|---|---|---|
| Name | Matrikelnr. | Datum |
| Gruppenmitglieder | | |
| Note | Unterschrift | |

# 1 Versuchsbeschreibung

## 1.1 Motivation

Eines der klassischen Beispiele der Regelungstechnik ist die Stabilisierung eines invertierten Pendels. Die Stabilisierung eines solchen Systems ist vergleichbar mit dem Balancieren eines Besenstiels auf der Fingerspitze und ist erfahrungsgemäß schwierig. Mit Hilfe geeigneter Regelungen lässt sich diese Aufgabe jedoch problemlos lösen.

Neben der Eignung des Systems grundlegende Prinzipien der Regelungs- und Systemtheorie zu untersuchen, gibt es eine Vielzahl technischer Anwendungen, die sich als invertiertes Pendel modellieren lassen. Beispiele hierfür sind u.a. die Beschreibung der Rolldynamik eines Schiffes sowie die Beschreibung der Dynamik einer Weltraumrakete. Sowohl in theoretischer als auch praktischer Hinsicht demonstriert es eindrucksvoll, dass instabile Ruhelagen eines nichtlinearen Systems mittels geeigneter linearer Regler lokal, d.h. um einen Arbeitspunkt oder eine Ruhelage, stabilisiert werden können.

## 1.2 Aufbau

Abbildung 1 zeigt den Versuchsaufbau der Regelstrecke. Der Aufbau besteht im Wesentlichen aus einem Wagen, der auf einer etwa 80 cm langen, horizontalen Führungsschiene geführt wird. Auf dem Wagen ist ein Stab der Länge $l$ so gelagert, dass er Drehbewegungen in der Ebene der Führungsschiene ausführen kann. Eine Massescheibe am freien Ende des Pendelstabs verleiht dem Pendel zusätzliche Trägheit.

Ziel der Regelung ist es, den Wagen an eine beliebige Referenzposition $z_r \in \mathcal{P} \subset \mathbb{R}$ zu fahren, während dabei die aufrechte, instabile Ruhelage des inversen Pendels stabilisiert wird.

Der Wagen wird über einen Aktuator bestehend aus einem Gleichstrommotor mit Getriebe angetrieben. Mit Hilfe eines Antriebsriemens zusammen mit einer Umlenkrolle wird der Aktuator fest mit dem Wagen verkoppelt (vergleiche Versuchsbeschreibung [4]).

Während das Positionssignal resistiv, d.h. über den Spannungsabfall an einem Potentiometer, ermittelt wird (linearer Zusammenhang Ohmsches Gesetz), wird die Wagengeschwindigkeit aus der Motordrehzahl $\bar{\omega}$ errechnet, welche über ein sogenanntes Motortachometer gemessen werden kann. Ein solches Motortachometer arbeitet nach dem Generatorprinzip. Durch die Drehung des Motorschafts wird im Tachometer eine (Generator-)Spannung induziert, die direkt proportional zur Motordrehzahl ist. Der Zusammenhang zwischen induzierter Spannung und Motordrehzahl ist auch hier linear. Die Auslenkung des Pendelstabs $\phi$ wird mittels eines elektromagnetischen Winkelsensors gemessen. Der Zusammenhang zwischen der Spannung am Sensorausgang und dem Winkel $\phi$ ist ebenfalls linear.

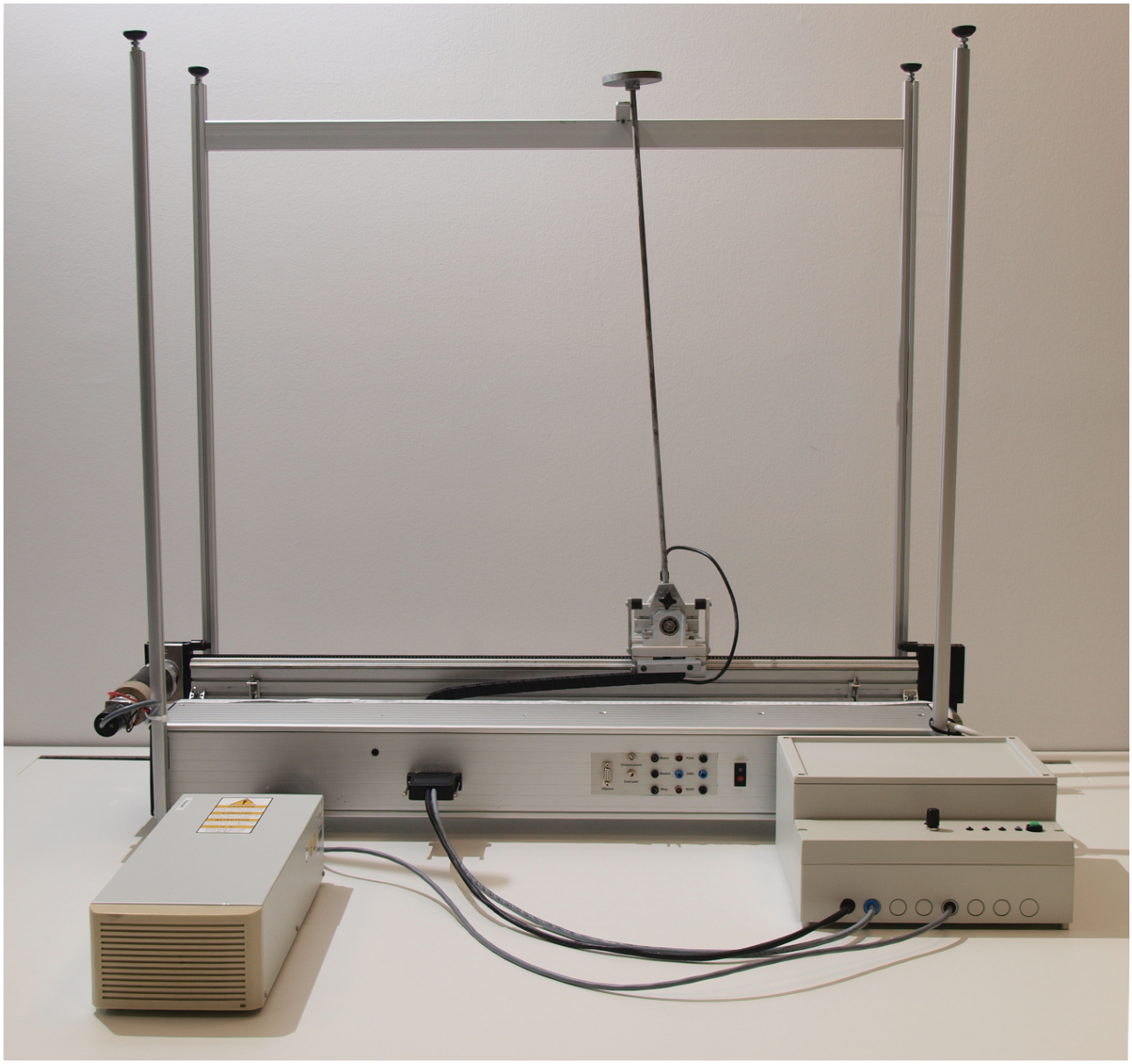

*Photo: Kai Wulff*

Abbildung 1: Versuchsaufbau „Inverses-Pendel“

### 1.3 Ansteuerung

Für die zeitdiskrete Reglersynthese steht ein digitales Echtzeitsystem (Controller-Board DS1103 PPC) der Firma dSpace zur Verfügung, welches komfortabel über eine Matlab/SIMULINK Schnittstelle programmiert werden kann. Die Ein-/und Ausgänge des dSpace-Systems sind dabei auf $\pm 10$V beschränkt. Das Stellsignal wird zusätzlich über einen Leistungsverstärker mit Verstärkungsfaktor $k_v = 2$ verstärkt, um die nötigen Leistungen sowie die Motornennspannungen $\bar{u} \in \bar{\mathcal{U}}$ zu erhalten. Es gilt $\bar{u}(t) = k_v u(t)$.

Aus Gründen der Sicherheit sind die linken und rechten Anschläge der Führungsschiene durch induktive Endlagenschalter geschützt, die beim Verlassen des zulässigen Positionsbereichs $\mathcal{P}$ die Motorelektronik vollständig abschalten. Die Freigabe der Elektronik erfolgt über den grünen Knopf an

der Bedienoberfläche des Leistungsverstärkers. Darüber hinaus werden zum Zweck der Überwachung die aktuelle Motorspannung $\bar{u}$, sowie der Motorstrom $i \in \mathcal{I} \subset \mathbb{R}$ gemessen. Nähere Informationen zum Echtzeitsystem entnehmen Sie bitte dem Dokument [3].

## 2 Modellbildung

Abbildung 2 zeigt die Prinzipskizze des Versuchsstandes. Dieser lässt sich in die Teilsysteme „Antriebsstrang“, bestehend aus Motor mit angekoppeltem Getriebe $g$, und „Pendel-Wagen“ unterteilen.

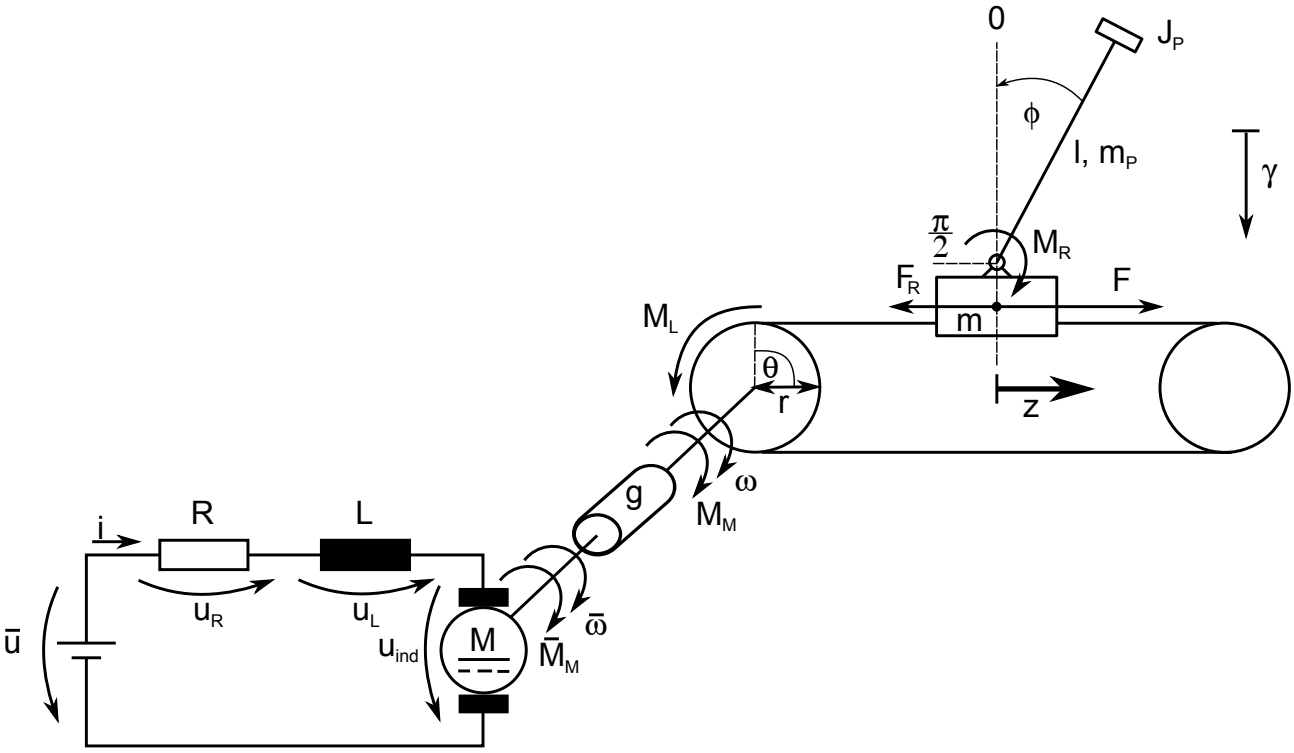


Abbildung 2: Ersatzschaltbild der gesamten Regelstrecke mit Gleichstrommotor (links) mit Getriebe $g$ und dem Wagen inklusive Pendelarm auf der horizontalen Führungsschiene (rechts).

Die Tabellen 1 und 2 stellen die wichtigsten physikalischen Prozessgrößen und Systemparameter zusammenfassend dar. Sie definieren zudem die im Folgenden verwendete Nomenklatur.

### 2.1 Antriebsstrang

Die Modellierung des Antriebsstrangs kann gemäß der Vorgehensweise aus [4] erfolgen. Der Antriebsstrang kann dann näherungsweise mit der gewöhnlichen Differentialgleichung erster Ordnung

$$J\dot{\omega}(t) = \frac{g\,k_v\,k_m}{R}\,u(t) - \left(\frac{k_m\,k_e\,g^2}{R} + \mu_M\right)\,\omega(t) - M_L(t) \tag{1}$$

mit getriebeabtriebsseitiger Winkelgeschwindigkeit $\omega$, der Reglerspannung $u = \bar{u}/k_v$ sowie dem abtriebsseitigen Lastmoment $M_L$ beschrieben werden. Die Bezeichnungen der übrigen Parameter können der Nomenklatur aus den Tabellen 1 und 2 entnommen werden.

| Variable/Notation | Bezeichnung | Wertebereich | Einheit |
|---|---|---|---|
| $z$ | Wagenposition | $z \in [-0.4, 0.4]$ | [m] |
| $\dot{z}$ | Wagengeschwindigkeit | $\dot{z} \in \mathbb{R}$ | [m/s] |
| $\theta$ | Rotorwinkel abtriebsseitig | $\theta \in \mathbb{R}$ | [rad] |
| $\bar{\omega}$ | Winkelgeschwindigkeit vor dem Getriebe | $\bar{\omega} \in \mathbb{R}$ | [rad/s] |
| $\omega$ | Winkelgeschwindigkeit abtriebsseitig | $\omega \in \mathbb{R}$ | [rad/s] |
| $u$ | Steuerspannung/Reglerstellsignal | $u \in [-10, 10]$ | [V] |
| $\bar{u}$ | Motoreingangsspannung (verst. Steuerspannung) | $\bar{u} \in [-20, 20]$ | [V] |
| $i$ | Motorstrom | $i \in [-3, 3]$ | [A] |
| $\phi$ | Pendelwinkel | $\phi \in [-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}]$ | [rad] |
| $\dot{\phi}$ | Winkelgeschwindigkeit Pendel | $\dot{\phi} \in \mathbb{R}$ | [rad/s] |

Tabelle 1: Liste der Zustands-, Mess- und Stellgrößen bzgl. ihrer Wertebereiche und Einheiten.

| Parameter | Bezeichnung | Parameterwert | Einheit |
|---|---|---|---|
| $R$ | Windungswiderstand Ankerwicklung | 3.2 | [Ω] |
| $L$ | Induktivität Ankerwicklung | 1.2e-3 | [H] |
| $k_e$ | elektrische Motorkonstante (Gegeninduktionskonstante) | 0.0468 | [Vs/rad] |
| $k_m$ | mechanische Motorkonstante | 0.04269 | [Nm/A] |
| $J$ | Trägheitsmoment Motor & Getriebe (abtriebsseitig) | 4.2e-4 | [kg m$^2$] |
| $g$ | Getriebeübersetzung | 5 | [ ] |
| $k_v$ | Verstärkung Leistungsverstärker | 2 | [ ] |
| $\mu_M$ | viskoser Reibkoeffizient Motor & Getriebe (abtriebsseitig) | 1.8e-4 | [kg m$^2$/s] |
| $\mu$ | viskoser Reibkoeffizient Wagen | 6.55 | [kg/s] |
| $m$ | Wagenmasse | 0.43849 | [kg] |
| $r$ | Radius Umlenkrolle | 0.02 | [m] |
| $J_p$ | Trägheitsmoment Pendelarm | 0.09019 | [kg m$^2$] |
| $l$ | Länge Pendelarm | 0.46898 | [m] |
| $m_p$ | Masse Pendelarm | 1.018 | [kg] |
| $\mu_p$ | viskoser Reibkoeffizient Pendellager | 1.471e-5 | [kgm$^2$/s] |
| $\gamma$ | Gravitationskonstante | 9.81 | [m/s$^2$] |

Tabelle 2: Liste der identifizierten Systemparameter.

### 2.2 Pendel-Wagen-Dynamik

Für die Beschreibung der Pendel und Wagendynamik werden die nichtlinearen Differentialgleichungen zweiter Ordnung

$$\begin{aligned} (m + m_p)\,\ddot{z}(t) + m_p\,l\,\cos(\phi(t))\,\ddot{\phi}(t) - m_p\,l\,\sin(\phi(t))\,\dot{\phi}^2(t) + F_R(t) &= F(t) \\ (J_p + m_p\,l^2)\,\ddot{\phi}(t) + m_p\,l\,\cos(\phi)\,\ddot{z}(t) - m_p\,l\,\gamma\,\sin(\phi(t)) + M_R(t) &= 0 \end{aligned} \tag{2}$$

verwendet. Hierbei sei $z$ die Wagenposition und $\phi$ der Pendelwinkel (vgl. mit Abbildung 2). Ferner bezeichnet $\gamma = 9.81\ \mathrm{m/s^2}$ die Gravitationskonstante, $F$ die vom Motor aufgebrachte Kraft auf den Wagen, $F_R$ den Reibterm für Translationsbewegungen entlang der Bewegungsachse und $M_R$ das Reibmoment im Kugellager der Pendelaufhängung. Für die Beschreibung aller weiteren Parameter wird auf Tabelle 2 verwiesen.

Es sei angemerkt, dass die Bewegungsgleichungen recht leicht über den sogenannten Lagrange-Formalismus hergeleitet werden können. An dieser Stelle soll jedoch nicht näher darauf eingegangen werden.

Obwohl die Reibphänomene am Versuchsstand stark nichtlinear und sehr stark ausgeprägt sind, beschränken wir uns der Einfachheit halber zunächst auf eine lineare Beschreibung der Reibung mit $F_R(t) = \mu\,\dot{z}(t)$ sowie $M_R(t) = \mu_p\,\dot{\phi}(t)$.

### 2.3 Kopplung zwischen Antriebsstrang und Pendel-Wagen

In Analogie zu [4] können, über den Radius $r$ der Umlenkrolle, die Größen $\omega$ und $\dot{\omega}$ aus Gleichung (1) durch $z$ und $\dot{z}$ ersetzt werden. Dann gilt

$$\frac{J}{r}\ddot{z}(t) = \frac{g\,k_v\,k_m}{R}\,u(t) - \left(\frac{k_m\,k_e\,g^2}{rR} + \frac{\mu_M}{r}\right)\dot{z}(t) - M_L(t). \tag{3}$$

Aus Gründen der Übersichtlichkeit verzichten wir im Folgenden auf die Zeitargumente der zeitabhängigen Variablen.

Da die Trägheitskraft des Systems bestehend aus Wagen und Pendel, skaliert um den Radius der Umlenkrolle, als Lastmoment am Motor anliegt, können wir die Differentialgleichungen aus (2) und (3) zusammenfassen. Es gilt

$$\left(m + m_p + \frac{J}{r^2}\right)\ddot{z} + m_p\,l\,\cos(\phi)\,\ddot{\phi} - m_p\,l\,\sin(\phi)\,\dot{\phi}^2 + \left(\frac{k_m\,k_e\,g^2}{r^2R} + \frac{\mu_M}{r^2} + \mu\right)\dot{z} = \frac{g\,k_v\,k_m}{r\,R}u \tag{4}$$

$$\left(J_p + m_p\,l^2\right)\ddot{\phi} + m_p\,l\,\cos(\phi)\,\ddot{z} - m_p\,l\,\gamma\,\sin(\phi) + \mu_p\,\dot{\phi} = 0 \tag{5}$$

Stellen wir nun die Gleichungen (4) und (5) jeweils nach $\ddot{z}$ bzw. $\ddot{\phi}$ um, so erhalten wir

$$\ddot{z} = f_z(\phi, \dot{\phi}, \ddot{\phi}, \dot{z}, u) \tag{6}$$

$$\ddot{\phi} = f_\phi(\phi, \dot{\phi}, \ddot{z}). \tag{7}$$

### 2.4 Linearisierung

Da wir uns im Rahmen dieses Versuches auf die Analyse und den Entwurf linearer Regler beschränken wollen, linearisieren wir (6) und (7) an der stationären Lösung bzw. dem stationären Betriebspunkt

$$(z_s, \phi_s, \dot{z}_s, \dot{\phi}_s, u_s) = (z_s, 0, 0, 0, 0) \tag{8}$$

der beiden Differentialgleichungen (vgl. mit Abbildung 2).

Die Linearisierung erhalten wir durch die lineare Approximation der Taylorreihen der Funktionen $f_z(\cdot)$ und $f_\phi(\cdot)$, entwickelt um den Betriebspunkt. Somit ergibt sich für die Linearisierung von (6)

$$\ddot{z} \approx f_z(\phi_s, \dot{\phi}_s, \ddot{\phi}_s, \dot{z}_s, u_s) + \left.\frac{\partial f_z}{\partial \phi}\right|_{BP} \Delta\phi + \left.\frac{\partial f_z}{\partial \dot{\phi}}\right|_{BP} \Delta\dot{\phi} + \left.\frac{\partial f_z}{\partial \ddot{\phi}}\right|_{BP} \Delta\ddot{\phi} + \left.\frac{\partial f_z}{\partial \dot{z}}\right|_{BP} \Delta\dot{z} + \left.\frac{\partial f_z}{\partial u}\right|_{BP} \Delta u \tag{9}$$

$$\Delta\ddot{z} = \frac{1}{m + m_p + \frac{J}{r^2}} \left( -m_p\, l \Delta\ddot{\phi} - \left( \frac{k_m\, k_e\, g^2}{r^2 R} + \frac{\mu_M}{r^2} + \mu \right) \Delta\dot{z} + \frac{g\, k_v\, k_m}{r\, R} \Delta u \right) \tag{10}$$

und für die von (7)

$$\ddot{\phi} \approx f_\phi(\phi_s, \dot{\phi}_s, \ddot{z}_s) + \left.\frac{\partial f_\phi}{\partial \phi}\right|_{BP} \Delta\phi + \left.\frac{\partial f_\phi}{\partial \dot{\phi}}\right|_{BP} \Delta\dot{\phi} + \left.\frac{\partial f_\phi}{\partial \ddot{z}}\right|_{BP} \Delta\ddot{z} \tag{11}$$

$$\Delta\ddot{\phi} = \frac{1}{J_p + m_p\, l^2} \left( -m_p\, l\, \Delta\ddot{z} - \mu_p \Delta\dot{\phi} + m_p\, l\, \gamma\, \Delta\phi \right). \tag{12}$$

$\Delta z = z - z_s$ repräsentiert hierbei die Abweichung der Positionsvariablen von ihrem Betriebspunkt. Die entsprechende Notation gilt analog für die Abweichungen der Größen $u$ und $\phi$ vom Betriebspunkt.

### 2.5 Zustandsraummodell

Zum Aufstellen eines Zustandsraummodells eignen sich häufig die sogenannten generalisierten Koordinaten, hier:

$$q(t) = \begin{pmatrix} \Delta z(t) \\ \Delta\phi(t) \end{pmatrix}. \tag{13}$$

Damit erhalten die Differentialgleichungen (10) und (12) die Form[1][2]

$$M\, \ddot{q}(t) + D\, \dot{q}(t) + G\, q(t) = \beta\, u(t) \tag{14}$$

mit

$$M = \begin{pmatrix} m_v & m_p\, l \\ m_p\, l & J_v \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} \mu_v & 0 \\ 0 & \mu_p \end{pmatrix}, \quad G = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -m_p\, l\, \gamma \end{pmatrix}, \quad \beta = \begin{pmatrix} \frac{g\, k_v\, k_m}{r\, R} \\ 0 \end{pmatrix} \tag{15}$$

und $m_v = (m + m_p + \frac{J}{r^2})$, $J_v = (J_p + m_p\, l^2)$ sowie $\mu_v = (\frac{k_m\, k_e\, g^2}{r^2 R} + \frac{\mu_M}{r^2} + \mu)$.
Stellt man nun (14) nach $\ddot{q}$ um und führt die Zustände

$$x = \begin{pmatrix} q^T & \dot{q}^T \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} \Delta z & \Delta\phi & \Delta\dot{z} & \Delta\dot{\phi} \end{pmatrix}^T =: \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{pmatrix}^T \tag{16}$$

ein, so erhält man die Zustandsraumbeschreibung des linearisierten Systems in der gewohnten Darstellung

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A\, x(t) + B\, u(t) \\ y(t) &= C\, x(t) \end{aligned} \tag{17}$$

[1] Die Differentialgleichung (14) ist der lineare Fall der sog. Robotikgleichung.
[2] Beachte: formal lautet die rechte Seite von (14) $\beta\Delta u(t) = \beta(u(t) - u_s)$. Da $u_s = 0$ schreiben wir im Weiteren $\beta u(t)$.

mit den Blockmatrizen

$$A = \left(\begin{array}{c|c} \mathbb{O}_{2\times 2} & \mathbb{I}_{2x2} \\ \hline -M^{-1}\,G & -M^{-1}\,D \end{array}\right), \quad B = \left(\begin{array}{c} \mathbb{O}_{2\times 1} \\ \hline M^{-1}\,\beta \end{array}\right). \tag{18}$$

Die Variablen $\mathbb{O}_{n\times m}$ und $\mathbb{I}_{n\times m}$ bezeichnen hierbei die Null- und Einheitsmatrizen der Dimension $n \times m$ mit $n, m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Ferner kann der Ausgang $y(t)$ aufgrund der Verfügbarkeit der Messsignale wahlweise durch

$$\begin{aligned} y_1(t) &= C_1\,x(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} x(t) \\ y_2(t) &= C_2\,x(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} x(t) \\ y_3(t) &= C_3\,x(t) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} x(t) \end{aligned}$$

oder anderen Kombinationen mehrerer Messgrößen gegeben sein.

Zusatzbetrachtung für Freiwillige

Eine andere typische Wahl des Zustandsvektors ist:

$$\tilde{x} = \begin{pmatrix} z(t) \\ \dot{z}(t) \\ \phi(t) \\ \dot{\phi}(t) \end{pmatrix}$$

Durch Umformungen von (10) und (12) erhält man die Zustandsraumbeschreibung der Form

$$\dot{\tilde{x}}(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & a_0 & a_1 & a_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & a_3 & a_4 & a_5 \end{pmatrix} \tilde{x}(t) + \begin{pmatrix} 0 \\ b_0 \\ 0 \\ b_1 \end{pmatrix} u(t) \tag{19}$$

$$y(t) = C\,\tilde{x}(t) \tag{20}$$

Die Struktur der Dynamikmatrix in (19) läßt sehr schön die zwei Teilsysteme 2. Ordnung (Wagen und Pendel) und deren Kopplungen erkennen. Andererseits, zeigt (18) die verallgemeinerte Struktur der Regelungsnormalform.

Können Sie eine reguläre Zustandstransformation finden, die (14) in (19) überführt?

Die Einträge der Matrizen ergeben sich zu:

$$\begin{aligned}
a_0 &= -\frac{\left(k_m\,k_e\,g^2 + \mu_M\,R + \mu\,r^2\,R\right)\,\left(J_p + m_p\,l^2\right)}{R\,N} \\
a_1 &= -\frac{m_p^2\,l^2\,r^2\,\gamma}{N} \\
a_2 &= \frac{m_p\,l\,r^2\,\mu_p}{N} \\
a_3 &= \frac{\left(k_m\,k_e\,g^2 + \mu_M\,R + \mu\,r^2\,R\right)\,m_p\,l}{R\,N} \\
a_4 &= \frac{\left(m\,r^2 + m_p\,r^2 + J\right)\,m_p\,l\,\gamma}{N} \\
a_5 &= -\frac{\left(m\,r^2 + m_p\,r^2 + J\right)\,\mu_p}{N} \\
b_0 &= \frac{g\,k_v\,k_m\,r\,\left(J_p + m_p\,l^2\right)}{R\,N} \\
b_1 &= -\frac{g\,k_v\,k_m\,r\,m_p\,l}{R\,N} \\
N &= \left(m\,r^2 + m_p\,r^2 + J\right)\,J_p + \left(J + m\,r^2\right)\,m_p\,l^2
\end{aligned}$$

## 3 Versuchsvorbereitung

### Aufgabe 3.1 (Modellbildung)

a) Machen Sie sich mit der Beschreibung des Versuchsaufbaus im Abschnitt 1 vertraut und arbeiten Sie die Modellbildung in Abschnitt 2 durch. Achten Sie dabei insbesondere auf folgende Fragestellungen:

- Welche vereinfachenden Annahmen werden gemacht?
- An welchem Betriebspunkt wird linearisiert?
- Was ist Ziel der Regelung?
- Welche Größen werden gemessen?
- Welche Größen stehen als Stellgrößen für die Regelung zur Verfügung?
- Welche Störeinflüsse gibt es?

b) Hinterlegen Sie die Parameter des Versuchsaufbaus in einem Parameterfile in Matlab[3].

### Aufgabe 3.2 (Abtastsystem und Zustandsregelung)

a) Implementieren Sie das zeitkontinuierliche Zustandsraummodell (17)-(18) mit $y(t) = C_1 x(t)$ in Matlab und berechnen Sie das Abtastsystem mit Halteglied nullter Ordnung (ZOH) numerisch für die Abtastzeit $T_a = 0.01$ sec.

b) Ist das Abtastsystem asymptotisch stabil?

c) Ist das Abtastsystem vollständig erreichbar?

d) Nehmen Sie an, dass alle Zustände messbar sind. Entwerfen Sie jeweils eine Zustandsrückführung der Form $u_k = k^T x_k + g\, r_k$, sodass der stationäre Regelfehler null ist und für die Eigenwerte im geschlossenen Regelkreis folgendes gilt:

(i) alle Eigenwerte besitzen eine Eckfrequenz von 2 rad/s und Dämpfung von 1;

(ii) alle Eigenwerte besitzen eine Dämpfung von $\frac{1}{\sqrt{2}}$ und jeweils zwei Eigenwerte eine Eckfrequenz von 3 rad/s und 2 rad/s;

(iii) der geschlossene Regelkreis weist Deadbeat-Verhalten auf.

*Hinweis:* Bestimmen Sie die Eigenwertlagen für (i) und (ii) zunächst im Zeitkontinuierlichen. Schreiben Sie sich eine Matlab-funktion, die die Zustandsrückführung für gegebene Eigenwertlagen und Abtastzeit ausgibt (wird auch bei der Durchführung benötigt).

[3] Für weitere Informationen zu den Befehlen nutzen Sie bitte die Matlab-Hilfefunktion oder die Matlab-Kurzreferenz [6]

e) Implementieren Sie Strecke und Regler in Simulink und stellen Sie die Sprungantworten der drei geschlossenen Regelkreise in einer Grafik dar. Vergleichen Sie Ihre Ergebnisse bzgl. des Führungsverhaltens und des Stellaufwands.

*Hinweis:* Nutzen Sie die Befehle: `c2dm`, `rank`, `step`, `poly`, `polyvalm`

### Aufgabe 3.3 (Zustandsbeobachter)

Im Folgenden sei angenommen, dass nicht alle Zustandsgrößen gemessen werden können. Zur Realisierung von Zustandsrückführungen soll ein Zustandsbeobachter entworfen werden, der die fehlenden Zustände durch adäquate Schätzungen ersetzt.

a) Ist ein Simulator zur Zustandsschätzung am betrachteten System geeignet?

b) Untersuchen Sie numerisch die Beobachtbarkeit des Systems jeweils für die Ausgangsmatrizen $C_1, C_2$ und $C_3$.

c) Entwerfen Sie einen Luenberger-Beobachter so, dass die Schätzfehlerdynamik Deadbeat-Verhalten aufweist.

d) Implementieren Sie den Beobachter zusammen mit der Strecke in einem Simulink-Modell. Simulieren Sie Ihr Modell für die Anfangsbedingungen der Regelstrecke $x_0 = \begin{pmatrix} 0.01 & 0.01 & 0 & 0 \end{pmatrix}^T$, die Eingangsfolge $(u_k) = (0, 0, \dots)$ sowie der Initialisierung der Beobachterzustände mit $\hat{x}_0 = 0$. Erfüllt der Beobachter seine Funktion erwartungsgemäß?

e) Schließen Sie in Ihrer Simulation den Regelkreis mit dem Regler aus 3.2 unter Verwendung des Beobachters. Stellen Sie die Sprungantworten grafisch dar und untersuchen Sie folgendes:

- Wählen Sie für die Zustandsrückführung die Eigenwerte (ii) und für den Beobachter Eigenwerte (iii).
- Wählen Sie als Anfangswert der Strecke $x_0 = \begin{pmatrix} 0.01 & 0.01 & 0 & 0 \end{pmatrix}^T$ und betrachten Sie für die Initialisierung des Beobachters $\hat{x}_0 = x_0$ und auch $\hat{x}_0 = 0$.
- Wählen Sie für die Zustandsrückführung die Eigenwerte (iii) und für den Beobachter Eigenwerte (ii).

### Aufgabe 3.4 (Reglerverifikation am nichtlinearen Modell)

Zur Verifikation des Reglers, wird nun das nichtlineares Modell `CartPendulumNonlin.mdl` genutzt.

a) Verifizieren Sie Ihre Zustandsrückführung mit Dead-beat-Verhalten aus Aufgabe 3.2c) und stellen Sie die Ergebnisse unter Verwendung des Matlab-Skripts `SimCartPendulumModel.m` dar.

Interpretieren Sie Ihre Ergebnisse.

b) Ändern Sie ihrer Reglerparameter, sodass die korrespondierenden zeitkontinuierlichen Pole Eckfrequenzen von 3 rad/s und 6 rad/s und eine Dämpfung von $1/\sqrt{2}$ sowie 1 aufweisen.

## 4 Versuchsdurchführung

### Zur Inbetriebnahme eines Regelkreises

Bevor ein Regelalgorithmus am Versuchsstand implementiert wird, ist er grundsätzlich anhand von Simulationen zu verifizieren.

Dafür steht Ihnen im Verzeichnis:

```
F:\Praktikum Digitale Regelung Treichel\Versuch 2\Zustandsregler
```

das nichtlineares Simulationsmodell `CartPendulumNonlin.mdl` zur Verfügung.

Im Anschluss an die erfolgreiche Verifikation des Reglers kopieren Sie den in der Simulation verwendeten Regler in das vorgegebene Schnittstellenmodell `ControlDesk_Modell.mdl` des Versuchsstands. Der Regler kann dann auf die Zielhardware übersetzt und freigegeben werden.

Wiederholen Sie diese Vorgehensweise bei jeder Änderung der Regler- oder Beobachterparameter, um so eine sichere Inbetriebnahme zu gewährleisten und Implementierungsfehler auszuschließen.

Übersetzen Sie niemals einen Regler, der nicht anhand der Simulation vorab erfolgreich verifiziert wurde.

### Aufgabe 4.1 (Beobachterverifikation am nichtlinearen Modell)

a) Nehmen Sie an, dass lediglich das Positionssignal für die Regelung zur Verfügung steht, d. h. $y(t) = C_1 x(t)$. Implementieren Sie Ihre Zustandsrückführung mit Beobachter mit Eigenwertlagen (ii) bzw. (iii) aus Aufgabe 3.2 und führen Sie eine Simulation durch. Interpretieren Sie das Ergebnis Ihrer Simulation.

   Versuchen Sie anhand der Simulation geeignete Regler-/Beobachter-Pole zur Stabilisierung des nichtlinearen Systems zu ermitteln.

b) Im Folgenden sei der Ausgang gegeben mit

$$y(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} x(t). \tag{21}$$

   Entwerfen Sie einen Beobachter mit Dead-Beat-Verhalten. Legen Sie die Eigenwerte der Zustandsrückführung so, dass zwei Eigenwerte eine Eckfrequenz von $\omega_0 = 3$ rad/s und eine Dämpfung von $1/\sqrt{2}$ aufweisen. Wählen Sie die übrigen zwei Eigenwerte etwa 2-mal schneller mit einem Dämpfungsgrad von 1. Simulieren Sie den geschlossenen Regelkreis und diskutieren Sie Ihre Ergebnisse.
   *Hinweis:* Nutzen den Befehl `place` für den Beobachterentwurf

### Aufgabe 4.2 (Experiment am Versuchsstand)

a) Nehmen Sie den Versuchsstand unter Verwendung der Anleitung [3] in Betrieb.

b) Verifizieren, implementieren und testen Sie den Regler aus 4.1 c) und untersuchen Sie dabei verschiedene Eigenwertlagen für Regler und Beobachter. Als Hilfestellung sind mögliche Eigenwertkonfigurationen in Tabelle 3 angegeben.

Interpretieren Sie Ihre Beobachtungen während des Experiments und stellen Sie diese mit den wesentlichen Vereinfachungen und Annahmen bei Modellbildung und Reglerentwurf in Zusammenhang.

| | $\left(A + b\,k^T\right)$ | $\left(A + \hat{k}\,c^T\right)$ |
|---|---|---|
| Eckfrequenz | $\{1, 1, 6, 6\}$ | $\{35, 35, 35, 35\}$ |
| Dämpfung | $\left\{\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 1, 1\right\}$ | $\{1, 1, 1, 1\}$ |
| Eckfrequenz | $\{3, 3, 6, 6\}$ | $\{35, 35, 35, 35\}$ |
| Dämpfung | $\left\{\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 1, 1\right\}$ | $\{1, 1, 1, 1\}$ |
| Eckfrequenz | $\{3, 3, 6, 6\}$ | $\{50, 50, 50, 50\}$ |
| Dämpfung | $\left\{\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 1, 1\right\}$ | $\{1, 1, 1, 1\}$ |
| Eckfrequenz | $\{3, 3, 6, 6\}$ | $\{100, 100, 100, 100\}$ |
| Dämpfung | $\left\{\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 1, 1\right\}$ | $\{1, 1, 1, 1\}$ |

Tabelle 3: Regler-/Beobachterspezifikationen

## Literatur

[1] F. Gausch, A. Hofer, and K. Schlacher. *Digitale Regelkreise*. Oldenbourg Verlag, 1993. http://regpro.mechatronik.uni-linz.ac.at/downloads/Buecher/DigiReg.pdf.

[2] A. Kugi. Automatisierung. Vorlesungsskript, TU Wien, 2013. http://www.acin.tuwien.ac.at/fileadmin/cds/lehre/aut/Archiv/WS1213/AutomatisierungVO_SingleSide.pdf.

[3] K. Treichel and K. Wulff. Anleitung zur Inbetriebnahme und der Ansteuerungssoftware. Versuchsanleitung zum Praktikum Digitale Regelungssysteme, TU Ilmenau, Fachgebiet Regelungstechnik, 2014. http://www.tu-ilmenau.de/fileadmin/public/regelungstechnik/Lehre/Praktika/dr-ibn_anleitung.pdf.

[4] K. Treichel and K. Wulff. Digitale Regelung einer Positionsstrecke. Versuchsanleitung zum Praktikum Digitale Regelungssysteme, TU Ilmenau, Fachgebiet Regelungstechnik, 2014. http://www.tu-ilmenau.de/fileadmin/public/regelungstechnik/Lehre/Praktika/DR1/dr-versuch1_anleitung.pdf.

[5] K. Wulff. Digitale Regelungen. Vorlesungsskript, TU Ilmenau, Fachgebiet Regelungstechnik, 2013. http://www.tu-ilmenau.de/regelungstechnik/lehre/digitale-regelungen/.

[6] K. Wulff. Matlab Kurzreferenz. Beiblatt, TU Ilmenau, Fachgebiet Regelungstechnik, 2013. http://www.tu-ilmenau.de/fileadmin/public/regelungstechnik/Lehre/Digitale_Regelung/Material/MatlabKurzRef.pdf.