Friedrich-Alexander-Universität Erlangen-Nürnberg
Lehrstuhl für Regelungstechnik

Prof. Dr.-Ing. G. Roppenecker
Prof. Dr.-Ing. T. Moor

Abschlußbericht zum DFG-Vorhaben RO 2262/3-1 und RO 2262/3-2

Thema: Algebraische Modellierung, Analyse und Synthese ereignisdiskreter Systeme über GF(2)

Kennwort: EDS über GF(2)

Forschungsstelle: Universität Erlangen-Nürnberg
Lehrstuhl für Regelungstechnik
Prof. Dr.-Ing. G. Roppenecker
Cauerstraße 7

91058 Erlangen

1 Allgemeine Angaben

1.1 DFG-Geschäftszeichen

1. Jahr und 2. Jahr:	RO 2262/3-1
3. Jahr:	RO 2262/3-2

1.2 Antragsteller

Vorname, Name:	Günter Roppenecker
akademischer Grad:	Dr.-Ing. habil.
Dienststellung:	Univ.-Professor für Regelungstechnik
Institution:	Friedrich-Alexander-Universität Erlangen-Nürnberg
Fachbereich:	Institut für Elektrotechnik, Elektronik und Informationstechnik
Dienstadresse:	Lehrstuhl für Regelungstechnik, Cauerstraße 7, 91058 Erlangen
Telefon:	09131/85-27127
Telefax:	09131/85-28715
E-Mail:	guenter.roppenecker@rt.eei.uni-erlangen.de

1.3 Thema

Algebraische Modellierung, Analyse und Synthese ereignisdiskreter Systeme über GF(2)

1.4 Berichtszeitraum: 1. Jahr bis 3. Jahr

1.5 Förderungszeitraum: 01. 04. 2002 bis 31.03.2005

1.6 Liste der Publikationen aus dem Projekt:

1. J. Reger, “Deadlock Analysis for Deterministic Finite State Automata using Affine Linear Models”, in: *Proc. of 2001 European Control Conference*, (Porto), 2001.
2. J. Reger, “Cycle Analysis for Deterministic Finite State Automata”, in: *IFAC Proc. of 15th World Congress*, (Barcelona), 2002.
3. J. Reger und K. Schmidt, “Modeling and Analyzing Finite State Automata in the Finite Field GF(2)”, in: *Proc. of 4th MATHMOD*, (Wien), Argesim, 2003.
4. K. Schmidt und J. Reger, “Synthesis of State Feedback for Linear Automata in the Finite Field GF(2)”, in: *Proc. of 4th MATHMOD*, (Wien), Argesim, 2003.
5. J. Reger, “Analysis of Multilinear Systems using Gröbner-bases over the Finite Field GF(2)”, in: *Proc. of 4th MATHMOD*, (Wien), Argesim, 2003. Preis für bestes Konferenzposter
6. J. Reger und K. Schmidt, “Aspects on Analysis and Synthesis of Linear Discrete Systems over the Finite Field $\mathbb{F}_q$”, in: *Proc. of 2003 European Control Conference*, (Cambridge), 2003.
7. J. Reger und K. Schmidt, “Modeling and Analyzing Finite State Automata in the Finite Field GF(2)”, *Mathematics and Computers in Simulation (MATCOM)*, 66 (2004). Elsevier B. V., 193–206

8. J. Reger und K. Schmidt, “A Finite Field Framework for Modelling, Analysis and Control of Finite State Automata”, *Mathematical and Computer Modelling of Dynamical Systems (MCMDS)*, 2004. zur Veröffentlichung angenommen.

9. K. Schmidt, J. Reger und T. Moor, “Hierarchical Control for Structural Decentralized DES”, in: *Proc. of 7th Workshop on Discrete Event Systems (WODES)*, (Reims), 2004.

10. J. Reger, “Linear Systems over Finite Fields — Modeling, Analysis, and Synthesis”, Dissertation, Shaker-Verlag, 2004.

2 Arbeits- und Ergebnisbericht

2.1 Zielsetzung des Projekts

Die Modellierung und Analyse endlicher Automaten als binär kodierte Systeme in einer Zustandsdarstellung über dem endlichen Körper GF(2) stellt in Aussicht, gewisse algebraische Größen mit Hilfe einer Zustandsrückführung derart beeinflussen zu können, daß am gesteuerten Automaten entsprechende Wunscheigenschaften erzielt werden. Über den Fall affin-linearer Systeme hinaus sollen unter Verwendung exakt linearisierender Verfahren zuletzt auch nichtlineare Systeme geregelt werden können.

Im Projekt wurden folgende vier Hauptziele verfolgt:

1. Modellierung und Analyse ereignisdiskreter Systeme in der Zustandsdarstellung über dem endlichen Körper GF(2)
2. Identifikation von Automateneigenschaften anhand der aus der Zustandsgleichung herleitbaren algebraischen Kenngrößen
3. Regelung von Automaten mit endlich vielen Zuständen
4. Vergleich und Einordnung der entwickelten Methoden und Ergebnisse mit denjenigen anderer Zustandsraumverfahren

Im Hinblick auf eine konstruktiv zu entwickelnde konsistente Theorie wurde das Forschungsvorhaben in folgende Teilprojekte gegliedert:

I. Analyse- und Synthesemethoden für Automaten mit affin-linearer Zustandsdarstellung über dem endlichen Körper GF(2)
   - (A) Analyse der homogenen Zustandsgleichung (ungesteuerter Fall)
   - (B1) Analyse der inhomogenen Zustandsgleichung für konstante Steuergrößen
   - (B2) Analyse der inhomogenen Zustandsgleichung für variable Steuergrößen
   - (C) Synthese von Zustandsrückführungen für Automaten mit affin-linearer Zustandsdarstellung über dem endlichen Körper GF(2)

II. Analyse- und Synthesemethoden für Automaten mit nichtlinearer Zustandsdarstellung über dem endlichen Körper GF(2)
   - (D) Beschreibung und Analyse nichtlinearer Systeme über dem endlichen Körper GF(2)
   - (E) Untersuchung des allgemeinen Falls anhand von exakt linearisierenden Verfahren
   - (F) Synthese von Zustandsrückführungen für Automaten mit nichtlinearer Zustandsdarstellung über dem endlichen Körper GF(2)

III. Vergleich und Wertung der Modelle und ihrer Eigenschaften

2.2 Arbeitsprogramm und erreichte Ergebnisse

Über den gesamten Zeitraum der Bearbeitung des Arbeitsprogramms hinweg wurde die anfänglich auf GF(2) beschränkte Aufgabenstellung auf den Fall GF(p) erweitert (wobei $p \in \mathbb{N}$ prim) und gelöst. Die Untersuchung des linearen Falls nahm dabei eine Zeitspanne von ca. 2 Jahren in Anspruch und erwies sich somit zeitaufwendiger als anfänglich im Projektantrag angenommen. Die Gesamtbearbeitungszeit für das Projekt verlängerte sich dadurch nicht. Denn die für den letzten Projektabschnitt F vorgesehenen Arbeiten zum nichtlinearen Fall erwiesen sich aufgrund des negativen Ergebnisses von Projektabschnitt E als nicht durchführbar.

Projektabschnitt A: Analyse der homogenen Zustandsgleichung

Problemstellung: Die Beschreibung linearer Automaten in Form einer homogenen, linearen Zustandsgleichung $\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{A}\,\mathbf{x}(k)$ über GF(2) erfordert die Entwicklung einer linearen Systemtheorie über einem endlichen Körper mit zwei Elementen. Diese homogenen linearen Systeme sind autonom, so daß das dynamische Verhalten alleine durch die Dynamikmatrix $\mathbf{A}$ und nicht durch äußeren Größen bestimmt ist. Gegenstand der Untersuchungen in diesem Projektabschnitt war es, Aussagen herzuleiten, mit Hilfe derer sich das Transitionsverhalten linear modellierter Automaten in strukturelle algebraische Kenngrößen der Dynamikmatrix $\mathbf{A}$ abbilden läßt.

Ergebnisse: In diesem Projektabschnitt wurden Ähnlichkeitstransformationen der Dynamikmatrix untersucht, welche Zerlegungen des Zustandsraums in disjunkte Unterräume gestatten. Als besonders vorteilhaft stellte sich hier eine Transformation des linearen Systems über GF(p) auf rationale kanonische Form heraus, infolge derer sich die feinstmögliche Zerlegung des Zustandsraums ergibt. Es zeigt sich, daß das Transitionsverhalten der Zustände in den entsprechenden Unterräumen alleine durch die sogenannten Elementarteilerpolynome der Dynamikmatrix bestimmt ist. Sind die Elementarteilerpolynome periodisch, so weisen die Zustände des zugehörigen Unterraums ein gewisses periodisches, also zyklisch wiederkehrendes Verhalten auf. Sind die Elementarteilerpolynome aperiodisch, d. h. zugehörige Begleitmatrizen nilpotent, so weisen die Zustände des zugehörigen Unterraums ein Transitionsverhalten in Form von Ketten auf; einmal erreichte Zustände werden dann nicht wieder erreicht. Diese Teilergebnisse sind wegen der Disjunktheit der entsprechenden Unterräume einer kombinatorischen Superposition zugänglich, welche insgesamt in ein Verfahren mündet, mit Hilfe dessen die Struktur des zugehörigen Automatengraphen vollständig bestimmt werden kann. Das Zustandsübergangsverhalten des homogenen, autonomen Systems konnte auf diese Weise gänzlich geklärt werden.

Veröffentlichung der Ergebnisse: Der Großteil der erzielten Ergebnisse wurde dem einschlägigen Expertenkreis zunächst auf Konferenzen zur Diskussion gestellt; siehe Publikationen der Nummern 1, 2, 3 und 6. Auf Grund eines Gutachtervorschlags wurden die Ergebnisse von 3 als Zeitschriftenbeitrag veröffentlicht (siehe Publikation 7). Die Beweise finden sich in Gänze in Publikation 10.

Projektabschnitt B: Analyse der inhomogenen Zustandsgleichung

Problemstellung: Aufbauend auf den Ergebnissen der Analyse homogener Systeme sollten in diesem Projektabschnitt inhomogene Systeme über GF(2), im speziellen affin-lineare Systeme der Form $\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{A}\,\mathbf{x}(k) + \mathbf{a}$ mit $\mathbf{a} =$ konst., untersucht werden. Betrachtet man die Zustandsgleichungen über GF(2) als logische Gleichungen im Sinne des Booleschen Differentialkalküls, so verkörpert der Konstantanteil $\mathbf{a}$ die Negation einer logischen Beziehung gemäß $\overline{z} = 1 + z \bmod 2$. Die Hinzunahme des additiven Anteils $\mathbf{a}$ ist also wesentliches Element der Zustandsdarstellung von Automaten über GF(2). Dem Projektabschnitt A ähnlich galt es, die strukturellen Eigenschaften des Automatengraphen aus der affin-linearen Zustandsgleichung durch eine algebraische Analyse der Dynamikmatrix $\mathbf{A}$ und des Konstantanteils $\mathbf{a}$ abzuleiten. In einem weiteren Schritt sollte die inhomogene Zustandsgleichung mit variablen Steuergrößen untersucht werden.

Ergebnisse: Das Zustandsübergangsverhalten affin-linearer Systeme über GF(p) konnte in zwei Schritten geklärt werden. Zunächst wurde überprüft, inwieweit das affin-lineare System kraft einer Zustandstransformation in ein lineares überführbar ist, um die Ergebnisse aus Projektabschnitt A anwenden zu können. Transformiert man die affin-lineare Zustandsgleichung mittels einer Matrix $\mathbf{T}$ gemäß der Transformation der Dynamikmatrix $\mathbf{A}$ in rationale kanonische Form, so gelingt die Reduktion auf den linearen homogenen Fall genau dann, wenn zu allen Elementarteilerpolynomen der Form $(\lambda+1)^i$ in der Dynamikmatrix verschwindende Summen in den Einträgen des entsprechenden Subvektors von $\mathbf{T}\,\mathbf{a}$ gehören. Ist dieses Kriterium für ein Teilsystem nicht erfüllt, so konnte gezeigt werden, daß der entsprechende Unterraum des Teilsystems in Zyklen gleicher Länge zerfällt. Ebenso wie im Projektabschnitt A konnten die Ergebnisse kombinatorisch superponiert werden, so daß auch das Zustandsübergangsverhalten affin-linearer Systeme über GF(p) als hinreichend geklärt gelten darf.

Für den Fall inhomogener Zustandsgleichungen mit variablen Steuergrößen konnte ein Steuerbarkeitskriterium angegeben werden, welches gestattet zu entscheiden, ob ein Zustand in einer gewissen Anzahl von Schritten erreicht werden kann. Ähnlich der Lösung der zeitdiskreten linearen Zustandsgleichung über den Körper der reellen Zahlen erhält man auch für den Fall über endlichen Körpern eine Lösungsformel in Abhängigkeit des Anfangszustands und der Eingänge bis zu einem bestimmten Zeitschritt.

Veröffentlichung der Ergebnisse: Auszüge der Ergebnisse wurden bereits in Publikation 2 der Öffentlichkeit vorgestellt; Beweise wurden hierbei beiseite gelassen. In ihrer vollständigen Form sind die Ergebnisse in Publikation 10 dargelegt.

Projektabschnitt C: Synthese von Regelkreisen für affin-lineare Systeme

Problemstellung: Sofern für eine gewisse Zustandsmenge Steuerbarkeit vorliegt, so ist für deren Zustände eine gezielte Ansteuerung mithilfe einer Eingangsgrößenfolge $\mathbf{u}(k)$ möglich. Dabei ist der Eingangsgröße $\mathbf{u}(k)$ idealerweise Information über den aktuellen Systemzustand $\mathbf{x}(k)$ mitzugeben, d. h. ein funktionaler Zusammenhang zu ihm herzustellen. Auf diesem Weg werden die Zustände des affin-linearen Systems — gerade wie bei der klassischen Zustandsregelung auch — systematisch auf den Streckeneingang rückgeführt. Mit dem Ziel einer Regelung für affin-lineare Systeme über GF(2) standen in diesem Teil des Projekts konstante, affin-lineare Zustandsrückführungen im Mittelpunkt.

Ergebnisse: Die Syntheseaufgabe wurde als die gezielte Vorgabe von Wunschzyklen in einem mittels einer Zustandsrückführung geschlossenen Regelkreis des linearen Systems über GF(p) verstanden. Dabei ließen sich Ergebnisse über die Steuerbarkeit kontinuierlicher linearer Systeme über $\mathbb{R}$ auf Systeme über GF(p) übertragen. Jedoch erwies sich die Lösung des Zyklenvorgabeproblems, interpretiert als Polvorgabeproblem im Urbereich, auf Grund der dabei zu untersuchenden Körpererweiterung zu GF(p) als zu aufwendig bzw. infolge vieler anfallender symbolischer Rechnungen als nur schwerlich handhabbar. Daher wurde die Problemlösung in einem bereits in den 60er Jahren von *Richalet* eingeführten Bildbereich für Funktionen über endlichen Körpern angegangen. Ähnlich dem klassischen Bildbereich der $\mathcal{Z}$-Transformation zur allgemeinen Lösung des Polvorgabeproblems ist der Bildbereich der sogenannten $\mathcal{A}$-Transformation auf das Zyklenvorgabeproblem zugeschnitten. Mithilfe der im $\mathcal{A}$-Bereich definierten Polynommatrixmethode konnte ein Algorithmus angegeben werden, welcher im Fall der Steuerbarkeit des Systems das Zyklenvorgabeproblem löst. Dazu ist die Lösung einer Diophantischen Gleichung ebenso nicht erforderlich wie die Betrachtung von Körpererweiterungen zu GF(p). Darüber hinaus konnte das Verfahren auf den Fall nicht-steuerbarer Teilsysteme erweitert werden. Das Zyklenvorgabeproblem für lineare Systeme über GF(p) kann hiermit als gelöst angesehen werden. Weiterhin konnte das Anfahrproblem gewisser Wunschzustände ausgehend von bestimmten Anfangszuständen gelöst werden.

Veröffentlichung der Ergebnisse: Der Algorithmus zur Lösung des Zyklenvorgabeproblems wurde in Publikation 4 erstmalig einer breiteren Öffentlichkeit vorgestellt. Auf Gutachtervorschlag wurden diese Ergebnisse mit den Ideen von Publikation 3 zu einem Übersichtsaufsatz zusammengefaßt und veröffentlicht (Publikation 8). Eine ausführliche Beschreibung der Methode findet sich in Publikation 10, welche im Anhang auch die Lösung des Anfahrproblems enthält.

Projektabschnitt D: Beschreibung und Analyse nichtlinearer Systeme

Problemstellung: Linear modellierbare Automaten sind nur geeignet, eine Unterklasse deterministischer Automaten exakt zu beschreiben. Daher ist es gemeinhin nötig, auch nichtlineare Systeme über GF(2) einer Regelung zugänglich zu machen. In diesem Abschnitt des Projekts sollte daher die Aufgabe angegangen werden, für nichtlineare deterministische Systeme über GF(2) adäquate Beschreibungsformen zu finden.

Ergebnisse: Ausgehend von Zustandstabellen, welche das Zustandsübergangsverhalten nichtlinearer dynamischer Systeme über GF(2) beschreiben, erwiesen sich zwei Methoden dienlich zur Herleitung der Zustandsdarstellung über GF(2): die Bestimmung der disjunktiven Normalform der Zustandsübergangsfunktion, anschließende Negation nach *DeMorgan* und Elimination der Negation durch Einführung der Addition modulo 2. Als einfacher erwies sich eine aus der Kodierungstheorie entlehnte Methode, welche auf der Verwendung einer sogenannten Reed-Muller-Generator-Matrix fußt. Mit beiden Verfahren konnte die Zustandsdarstellung über GF(2) auch für den Fall nicht-deterministischer Systeme (d. h. mehrere Folgezustände nach einem Zeitschritt) angegeben werden. Ferner zeigte sich, daß die Zustandsdarstellung eines Systems über GF(p) im allgemeinen ein polynomial nichtlineares System von maximalem Grad $p-1$ ist, d. h. im Fall GF(2) einem multilinearen System gleichkommt.

Für die Analyse solcher Systeme konnten indes keine strukturellen algebraischen Eigenschaften wie im linearen Fall gefunden werden. Dennoch konnte das zyklische Verhalten nichtlinearer Systeme über GF(2) in Anlehnung an Ergebnisse von Forschungsgruppen in Rennes und Linköping durch die Lösung von multilinearen Gleichungssystemen über GF(2) bestimmt werden. Die Lösung eines solchen Gleichungssystems war im Anschluß an die Bestimmung einer sogenannten Gröbner-Basis des multilinearen Gleichungssystems über GF(2) in rekursiver Weise möglich.

Veröffentlichung der Ergebnisse: Die Bestimmung der Zustandsdarstellung nichtlinearer Systeme über GF(2) wurde zunächst auf zwei Konferenzen (Publikationen 2 und 3) vorgestellt. Detaillierter behandelt wird diese Thematik in den Beiträgen 7, 8 und 10. Ein Verfahren zur Bestimmung zyklischer Zustände in multilinearen Systemen über GF(2) wurde als Poster präsentiert (Publikation 5).

Projektabschnitt E: Exakt linearisierende Verfahren

Problemstellung: Die zuvor im Projektabschnitt D eingeführten nichtlinearen Systemmodelle sollten nun (zunächst ohne Zustandsrückführung) durch Zustandstransformationen auf Modelle geringerer Komplexität reduziert werden. Soweit möglich sollten diese Modelle am Ende linear sein, damit ähnliche Regelungskonzepte eingesetzt werden können, wie sie zuvor im affin-linearen Fall (Projektabschnitt C) verwendet wurden. Konsequenterweise sollten diese Modelle das zugrunde liegende Verhalten exakt beschreiben bzw. als auf den engen Bereich ihrer exakten Gültigkeit beschränkt betrachtet werden.

Ergebnisse: Die Aufgabenstellung kann in dieser Form nicht gelöst werden. Es zeigte sich, daß die zunächst in Erwägung gezogenen exakt linearisierenden Verfahren für nichtlineare Systeme über GF(p) nicht existieren. Auch können Reihenentwicklungen von nichtlinearen Funktionen über GF(p)

nicht als Näherung interpretiert werden. Letztlich begründet sich dies im Fehlen einer aussagekräftigen Norm über GF(p), wie es sie im Gegensatz dazu als euklidische Norm im Kontinuierlichen gibt. Lineare Einbettungsverfahren wurden ebenso verworfen, da sie nur für eine sehr kleine Klasse nichtlinearer Systeme Algorithmen handhabbarer Komplexität lieferten.

Veröffentlichung der Ergebnisse: Ein untersuchtes lineares Einbettungsverfahren enthält Publikation 1.

Projektabschnitt F: Synthese von Regelkreisen für nichtlineare Systeme

Problemstellung: Im Rahmen des Reglerentwurfs sollten diejenigen Systeme mit nichtlinearer Zustandsdarstellung über GF(2) in die Überlegungen einbezogen werden, die sich grob in die folgenden Klassen unterteilen lassen:

i) Systeme, welche (im Bezug auf Projektabschnitt E) alleine durch Zustandstransformationen exakt linearisiert werden können,

ii) Systeme, welche über i) hinaus noch einer Zustandsrückführung zur exakten Linearisierung bedürfen und

iii) Systeme, welche in einem erweiterten Zustandsraum unter bestimmten Voraussetzungen (zumindest) exakt bilinearisiert werden können.

Dabei können mit einer Regelung sehr unterschiedliche Ziele verfolgt werden. Die Aufgaben reichen vom Entwurf der Anfahrregelung zum finalen Betriebszustand einer Anlage, den Entwurf einer Trajektorienfolgeregelung bis hin zur gezielten Vermeidung verbotener Systemzustände. In diesem Projektabschnitt sollten zu diesen Entwurfszielen Regelungskonzepte bezüglich der drei obigen Systemklassen erarbeitet werden.

Ergebnisse: Bezugnehmend auf die Unmöglichkeit der Durchführung einer exakten bzw. näherungsweisen Linearisierung, siehe Projektabschnitt E, entfiel diese Aufgabe. Im Rahmen der Bearbeitung dieses Projektabschnitts stellte sich überdies heraus, daß diese und weitere derartige Problemstellungen bereits von der Forschungsgruppe *INRIA* in Rennes in umfassender Weise bearbeitet und gelöst wurden. Der dort verwendete Ansatz setzt tiefergehende Kenntnisse aus der Idealtheorie endlicher Körper und fortgeschrittene Kapitel aus der algebraischen Geometrie voraus, so daß es in der verfügbaren Bearbeitungszeit als unmöglich erschien, zu dieser Thematik noch einen wesentlichen weiteren Beitrag zu leisten. Eine ausführliche Übersicht findet sich in: Hervé Marchand, „Méthodes de synthèse d'automatismes d'écrits par des systèmes à événements discrets finis“, Dissertation, Université de Rennes, Oktober 1997.

Weitere Arbeiten im Rahmen der Suche nach Alternativen zu den in Projektabschnitt E und F geplanten Vorgehensweisen

Zur systematischen Inbetriebnahme und Steuerung einer Modellanlage einer Fertigungsstraße am Lehrstuhl für Regelungstechnik wurden hierarchische und dezentrale Ansätze aus der supervisory control theory untersucht und erweitert. Erste Ergebnisse finden sich im Konferenzbeitrag der Nummer 9.

Projektabschnitt: Vergleich und Wertung der Modelle und ihrer Eigenschaften

Das Zustandsraummodell über endlichen Körpern wurde über alle Projektphasen hinweg mit anderen Zustandsraummodellen verglichen. Im Vergleich zu den verwandten Modellierungsverfahren „arithmetische Polynome“ und „Walsh-Funktionen“ ließen sich mit dem Modell über endlichen Körpern stärkere Aussagen abgeleiten. Ein weiterer Vorteil ist die geringere numerische Komplexität der Algorithmen, zumindest im linearen Fall. Die Einleitung in Publikation 10 gibt über weitere Details Auskunft.

2.3 Projektmitarbeiter

Die Ergebnisse des DFG-Vorhabens wurden von Herrn Dr.-Ing. Johann Reger und Herrn Dipl.-Ing. Klaus Schmidt unter der Betreuung zunächst von Herrn Prof. Dr.-Ing. Günter Roppenecker und später von Herrn Prof. Dr.-Ing. Thomas Moor erarbeitet.

2.4 Nachwuchsqualifikation

Im Zusammenhang mit der Projektbearbeitung wurden am Lehrstuhl für Regelungstechnik 2 Diplomarbeiten und eine Studienarbeit angefertigt und die als Publikation 10 beigefügte Dissertation verfaßt, mit der Herr Johann Reger Mitte 2004 zum Dr.-Ing. promoviert wurde.

3 Zusammenfassung

Gegenstand der Untersuchungen waren endlichen Automaten, die sich in ein diskretes Zustandsraummodell über einem endlichen Körper fügen. Dazu wurden Methoden zur algebraischen Modellierung sowie, im linearen Fall, strukturelle Analyse- und Syntheseverfahren herausgearbeitet. Statt des Falls GF(2), wie beantragt, konnte der allgemeine Fall GF(p) bearbeitet werden.

Ausgangspunkt der Modellbildung war hierbei eine Tabelle, in der in Abhängigkeit jedes Zustands und Eingangs entsprechende Nachfolgezustände verzeichnet sind. Auf dieser Grundlage wurden zwei Verfahren aus der Booleschen Algebra bzw. Kodierungstheorie vorgestellt, welche die Berechnung einer Zustandsübergangsfunktion über einem endlichen Körper gestatten. Diese Darstellung schließt den nicht-deterministischen Fall mehrerer Folgezustände ein und ermöglicht die algebraische Modellierung beliebiger endlicher Automaten.

Im mit der Analyse befaßten Teil des Projekts wurde das Zustandsübergangsverhalten autonomer linearer Systeme über einem beliebigen endlichen Körper detailliert untersucht. Dabei wurde auf die reichhaltige Theorie linearer Schaltkreise der sechziger Jahre zurückgegriffen, im Gegensatz dazu aber die Herleitung nicht auf tiefergehende Erkenntnisse über endliche Ringe gegründet, sondern auf fortgeschrittenen Kapiteln der linearen Algebra. Auf diesem Weg konnte gezeigt werden, wie strukturelle algebraische Eigenschaften der Systemdynamikmatrix, genauer, die Perioden ihrer Elementarteilerpolynome, das Übergangsverhalten von Zuständen bestimmen, womit ein notwendiges wie hinreichendes Kriterium zur Zerfällung des Zustandsraums in zyklische und nicht-zyklische Unterräume hergeleitet wurde. Ist ein endlicher Automat als ein solches lineares System darstellbar, so ist damit zum ersten Mal ein Kriterium dargelegt worden, welches alle Automatenzyklen in Länge und Anzahl liefert sowie das nicht-zyklische Übergangsverhalten beschreibt. Es ergibt sich also eine Methode, mit Hilfe derer sich der zugehörige Automatengraph nur unter Verwendung der Systemdynamikmatrix eindeutig bestimmen läßt. Ein entsprechendes Ergebnis erhält man auch für affin-lineare autonome Systeme über einem endlichen Körper.

Mit dem Wissen um den Einfluß der Elementarteilerpolynome auf das zyklische Verhalten eines autonomen linearen Systems über einem endlichen Körper gelang im Synthese-Teil des Projekts erstmalig die Herleitung eines Verfahrens zur gezielten Vorgabe des zyklischen Verhaltens eines linearen Systems über einem endlichen Körper. Die dazu geeigneten statischen linearen Zustandsrückführungen können aber, will man im Mehrgrößenfall alle Elementarteilerpolynome vorgeben und nicht nur das charakteristische Polynom im geschlossenen Regelkreis, kaum mit klassischen Zeitbereichsverfahren wie z. B. der vollständigen modalen Synthese entworfen werden. Dagegen ist dies in einem dem $\mathcal{Z}$-Bereich entsprechenden Bildbereich über einem endlichen Körper, dem sogenannten $\mathcal{A}$-Bereich, auf einfache Weise möglich: mit der im $\mathcal{A}$-Bereich erklärten Polynommatrixmethode. Die Lösung des Zyklenvorgabeproblems erfolgt in zwei Schritten: Mithilfe des Rosenbrockschen Kontrollstrukturtheorems wird die Frage der Existenz einer derartigen Zustandsrückführung geklärt. Die Synthese der Rückführung selbst geschieht durch Umformung der Nennermatrix einer rechtsprimen Polynommatrixzerlegung der Übertragungsmatrix bzgl. einer Zustandsdarstellung über GF(p) in Steuerbarkeitsnormalform. Die dazu nötigen Schritte beschreibt ein Algorithmus, der eine passende Nennermatrix des geschlossenen Regelkreis liefert. Eine einfache Rechnung ergibt dann die gesuchte Matrix der Zustandsrückführung. Eine Diophantische Gleichung muß hierzu nicht gelöst werden. In einem weiteren Schritt wurde dieses Verfahren auf lineare Systeme mit nicht-steuerbarem Anteil erweitert. Hierzu wird eine an die klassische Steuerbarkeitsnormalform angelehnte Darstellung abgeleitet, die den steuerbaren und nicht-steuerbaren Systemanteil offenlegt. Zur Unterbindung des Einflusses seitens des Anfangszustands des nicht-steuerbaren Systemanteils werden steuerbarer und nicht-steuerbarer Systemanteil voneinander entkoppelt, was sich für beliebige lineare Systeme mit nicht-steuerbarem Anteil als immer möglich erweist. Am Ende der Untersuchungen steht eine Methode, welche die Anwendung des zuvor für steuerbare Systeme ermittelten Algorithmus auf das steuerbare Teilsystem erlaubt, das charakteristische Polynom des nicht-steuerbaren Teilsystems aber unberührt läßt.

Ferner konnte gezeigt werden, daß klassische Verfahren zur Regelung von kontinuierlichen nichtlinearen Systemen, wie z. B. die exakte bzw. näherungsweise Linearisierung, sich nicht auf den Fall nichtlinearer Systeme über einem endlichen Körper übertragen lassen. Das Fehlen einer aussagekräftigen Norm über GF(p) läßt die übliche Interpretation als *Approximation eines nichtlinearen Systems* kaum zu. Auch lineare Einbettungsverfahren mußten auf Grund der numerischen Komplexität der sich ergebenden Algorithmen verworfen werden. Numerisch handhabbare Entwurfsverfahren zur Regelung nichtlinearer Systeme über GF(p) sind Gegenstand aktueller Forschung.