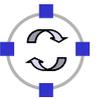


Programmierung und Algorithmen

Kapitel 2 Algorithmische Grundkonzepte

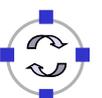


Intuitiver Algorithmenbegriff

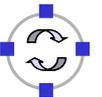
Sprachen und Grammatiken

Elementare Datentypen

Terme



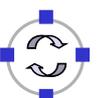
Ein **Algorithmus** ist eine präzise (in einer festgelegten Sprache abgefasste) endliche Beschreibung eines allgemeinen Verfahrens unter Verwendung ausführbarer elementarer (Verarbeitungs-)Schritte.



1. Addition zweier positiver Dezimalzahlen (mit Überträgen)

$$\begin{array}{r} 33 \\ + 48 \\ \hline 81 \end{array}$$

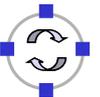
2. Test, ob eine gegebene natürliche Zahl eine Primzahl ist
3. Sortieren einer unsortierten Kartei (etwa lexikographisch)
4. Berechnung der Zahl $e = 2.7182 \dots$



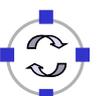
Ein Algorithmus heißt **terminierend**, wenn er (bei jeder erlaubten Eingabe von Parameterwerten) nach endlich vielen Schritten abbricht.

- ❑ **Frage:** Terminieren die Algorithmen von der vorigen Folie?
- ❑ Beispiel

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$$



- ❑ Legt „Wahlfreiheit“ bei der Ausführung fest
- ❑ Formen
 - ❑ **deterministischer Ablauf:** eindeutige Vorgabe der Folge der auszuführenden Schritte
 - ❑ **determiniertes Ergebnis:** eindeutiges Ergebnis bei vorgegebenen Parameterwerten
- ❑ Drei Klassen bezüglich des Ablaufs
 - ❑ Ein **deterministischer Algorithmus** hat einen deterministischen Ablauf
 - ❑ Ein **randomisierter Algorithmus** hat einen deterministischen Ablauf und eine zusätzliche, **zufällige** Eingabe
 - ❑ Ein **nichtdeterministischer Algorithmus** (formales Modell!) hat einen nichtdeterministischen Ablauf
 - Bemerkung: dieses Modell wird von korrekt funktionierenden Computern üblicherweise nicht unterstützt



□ Beispiel #1 (randomisiert)

Eingabe: Zahl x zusätzliche, zufällige Eingabe: Zahl r (nicht vom Nutzer gewählt)

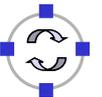
1. Addiere r zu x und multipliziere Ergebnis mit 3
2. Gib das Ergebnis aus

- Hier ist das Ergebnis von r abhängig – das muss nicht so sein!
- Es können auch determinierte Ergebnisse erzielt werden – ggf. sind dann andere Dinge wie Laufzeit o.ä. zufällig (siehe weitere Vorlesungen)

□ Beispiel #2 (nicht-deterministisch)

Eingabe: Zahl x

1. Entweder: Addiere das Dreifache von x zu x und teile das Ergebnis durch x : $(3x + x)/x$
Oder: Subtrahiere 4 von x und subtrahiere das Ergebnis von x : $x - (x - 4)$
2. Gib das Ergebnis aus



- Wichtige Klasse: deterministische, terminierende Algorithmen
 - definieren Ein-/Ausgabefunktion

 f : Eingabewerte \rightarrow Ausgabewerte

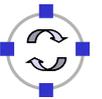
1. Addition zweier positiver Dezimalzahlen (mit Überträgen)

$$f: \mathbb{Q}^+ \times \mathbb{Q}^+ \rightarrow \mathbb{Q}^+ \text{ mit } f(p, q) = p + q$$

\mathbb{Q}^+ seien die positiven Rationalzahlen

2. Test, ob eine gegebene natürliche Zahl eine Primzahl ist

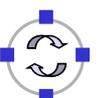
$$f: \mathbb{N} \rightarrow \{ \mathbf{ja}, \mathbf{nein} \} \text{ mit } f(n) = \begin{cases} \mathbf{ja} & \text{falls } n \text{ Primzahl} \\ \mathbf{nein} & \text{sonst} \end{cases}$$



3. Sortieren einer unsortierten Kartei (etwa lexikographisch)
 K Menge von Karteikarten
 S_K Menge von sortierten Karteien über K
 US_K Menge von unsortierten Karteien über K

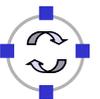
$$f: US_K \rightarrow S_K$$

4. Berechnung der Stellen der Zahl $e = 2.7182 \dots$
nicht terminierend!

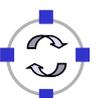


- ❑ Elementare Operationen
- ❑ Sequenzielle Ausführung (ein Prozessor!)
- ❑ Parallele Ausführung (mehrere Prozessoren!)
- ❑ Bedingte Ausführung
- ❑ Schleife
- ❑ Unter „programm“
- ❑ Rekursion: Anwendung des selben Prinzips auf kleinere Teilprobleme

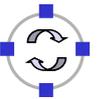
Beispiel: Anweisungen in Kochbüchern



- ❑ Code = (lauffähiges) Programm in einer Programmiersprache
- ❑ Pseudocode = (nicht lauffähige) Algorithmenbeschreibung in Anlehnung an Programmiersprachen
 - ❑ Schlüsselworte aus Programmiersprachen (eingedeutscht oder englisch)
 - ❑ Anweisungen in natürlicher Sprache
 - ❑ Wenn passend: mathematische Notationen, Programmfragmente



- (1) Koche Wasser
- (2) Gib Kaffeepulver in Tasse
- (3) Fülle Wasser in Tasse

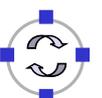


- (2) Gib Kaffeepulver in Tasse

verfeinert zu

- (2.1) Öffne Kaffeeglas
- (2.2) Entnehme Löffel von Kaffee
- (2.3) Kippe Löffel in Tasse
- (2.4) Schließe Kaffeeglas

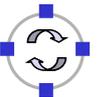
Entwurfsprinzip der **schrittweisen Verfeinerung**



- Sequenzoperator: ;

Koche Wasser;
Gib Kaffeepulver in Tasse;
Fülle Wasser in Tasse

- Erspart die Durchnummerierung



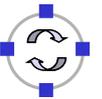
falls Bedingung
dann Schritt

bzw.

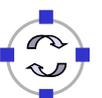
falls Bedingung
dann Schritt *a*
sonst Schritt *b*



```
falls Ampel ausgefallen
dann fahre vorsichtig weiter
sonst falls Ampel rot oder gelb
dann stoppe
sonst fahre weiter
```



```
/* nächste Primzahl */
wiederhole
  Addiere 1;
  Teste auf Primzahleigenschaft
bis Zahl Primzahl ist;
gib Zahl aus
```



```
/* Bestimmung der größten Zahl einer Liste */
```

```
Setze erste Zahl als bislang größte Zahl
```

```
solange Liste nicht erschöpft
```

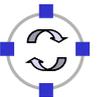
```
führe aus
```

```
    Lies nächste Zahl der Liste
```

```
    falls diese Zahl > bislang größte Zahl
```

```
        dann setze diese Zahl als bislang größte Zahl;
```

```
    gib bislang größte Zahl aus
```



```
wiederhole ... bis
```

```
solange ... führe aus
```

```
wiederhole für
```

```
repeat ... until ...
```

```
do ... while ...
```

```
while ... do ...
```

```
while (...) ...
```

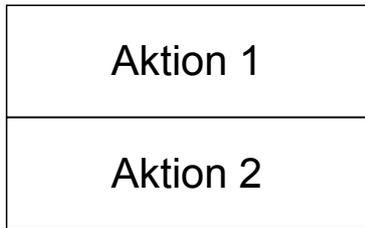
```
for each ... do ...
```

```
for ... do ...
```

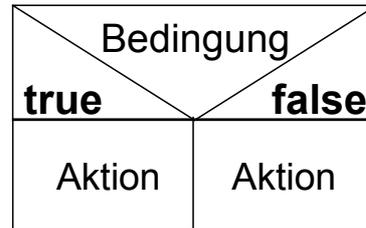
```
for (...) ...
```



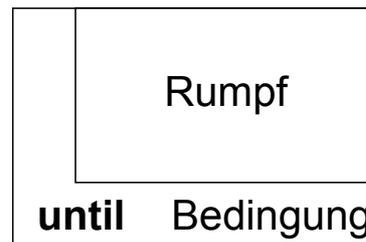
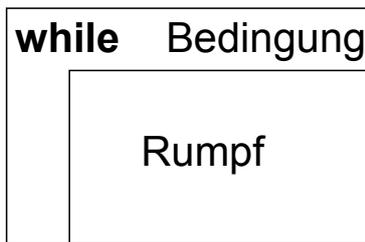
- Graphische Notation für Sequenz, Bedingung, Schleife



Sequenz



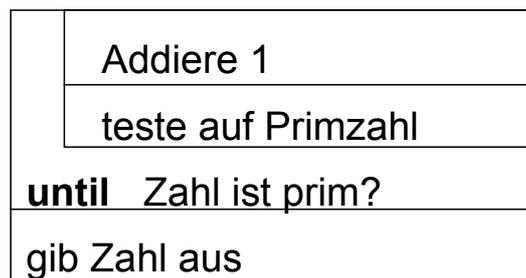
Bedingte Anweisung



Schleifen



- Bestimmung der nächstgrößeren Primzahl

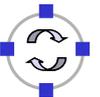


- Grundlegendes Prinzip der Informatik

Die **Rekursion** bedeutet die Anwendung des selben Prinzips auf kleinere oder einfachere Teilprobleme, bis diese Teilprobleme so klein sind, dass sie direkt gelöst werden können.

- Definition:

Als **Rekursion** (lat. recurrere „zurücklaufen“) bezeichnet man die Technik, eine Funktion durch sich selbst zu definieren (rekursive Definition). Wenn man mehrere Funktionen durch wechselseitige Verwendung voneinander definiert, spricht man von wechselseitiger Rekursion.



- *Um Rekursion zu verstehen, muss man erst einmal Rekursion verstehen.*

bzw.

Kürzeste Definition für Rekursion: siehe Rekursion.

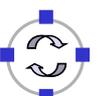


- Bemerkungen:

- Nicht jede rekursive Definition ist eine Definition im eigentlichen Sinn, denn die zu definierende Funktion braucht nicht wohldefiniert zu sein.
- Jeder Aufruf der rekursiven Funktion muss sich durch Entfalten der rekursiven Definition in endlich vielen Schritten auflösen lassen. Umgangssprachlich sagt man, sie darf nicht in einen infiniten Regress („Endlosschleife“) geraten.

- Später noch ausführlicher behandelt, hier nur motivierendes Beispiel:

- *Türme von Hanoi*



- Aufgabenbeschreibung:
 - Zu jedem Zeitpunkt können Türme von Scheiben unterschiedlichen Umfangs auf drei Plätzen stehen:
 - Der ursprüngliche Standort wird als Quelle bezeichnet
 - Ein Turm der Höhe n (z.B. $n=64$), der zu Anfang bei der Quelle steht, soll zu einem Zielstandort (Senke) bewegt werden
 - Es steht ein dritter Standort, der sogenannte Arbeitsbereich zur Verfügung
 - Nur die jeweils oberste Scheibe eines Turms darf einzeln bewegt werden
 - Dabei darf nie eine größere auf einer kleineren Scheibe zu liegen kommen
- In welcher Reihenfolge müssen die Scheiben bewegt werden?
 - Man probiere es mit einem kleinen Beispiel, z.B. vier unterschiedlich große Geldstücke oder Bücher



- Idee: Angenommen, ich kann einen Turm der Höhe $n-1$ bewegen, dann kann ich auch einen Turm der Höhe n bewegen



Modul Turmbewegung(n , Quelle, Senke, AB)

/ Bewegt einen Turm der Höhe n
von Quelle nach Senke unter Benutzung
des Arbeitsbereichs AB */*

falls $n = 1$

dann bewege Scheibe von Quelle zur Senke

sonst Turmbewegung($n-1$, Quelle, AB, Senke)

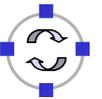
bewege 1 Scheibe von Quelle zur Senke

Turmbewegung($n-1$, AB, Senke, Quelle)

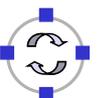
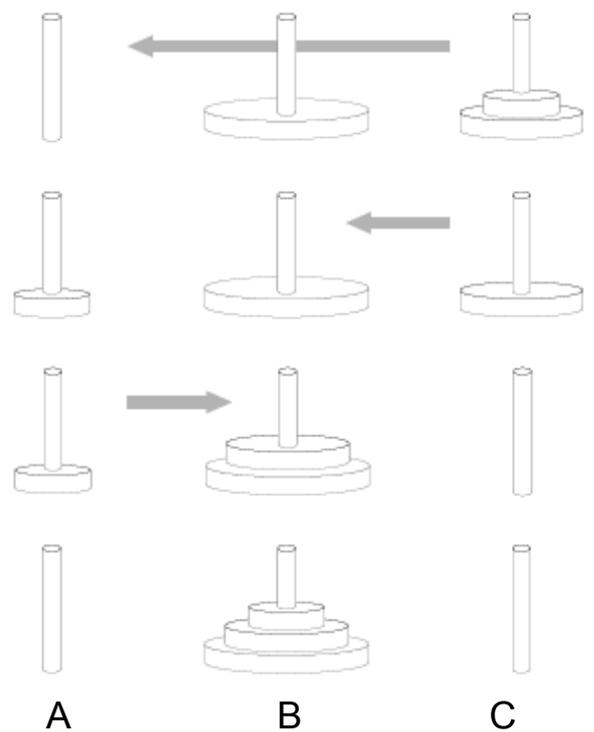
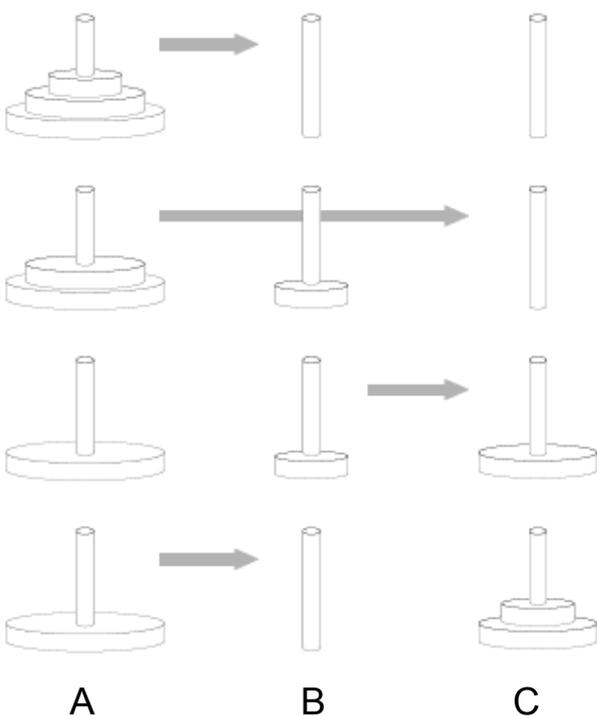


```

Turm(3, A, B, C)
  Turm(2, A, C, B)
    Turm(1, A, B, C)
      bewege A → B
    bewege A → C
  Turm(1, B, C, A)
    bewege B → C
bewege A → B
Turm(2, C, B, A)
  Turm(1, C, A, B)
    bewege C → A
  bewege C → B
Turm(1, A, B, C)
  bewege A → B
  
```

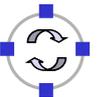


Ablaufbeispiel:



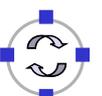
- ❑ **Syntax:** Formale Regeln, welche Sätze gebildet werden können:
 - ❑ „Der Elefant aß die Erdnuss.“ (syntaktisch korrekt)
 - ❑ „Der Elefant aß Erdnuss die.“ (syntaktisch falsch)

- ❑ **Semantik:** (Formale) Regeln, welche Sätze eine *Bedeutung* haben:
 - ❑ „Der Elefant aß die Erdnuss.“ (semantisch korrekt, „sinnhaft“)
 - ❑ „Die Erdnuss aß den Elefant.“ (semantisch falsch, „sinnlos“)



- ❑ **Grammatik:** Regelwerk zur Beschreibung der Syntax
- ❑ **Produktionsregel:** Regel einer Grammatik zum Bilden von Sätzen, z. B.
Satz \mapsto Subjekt Prädikat Objekt.

- ❑ **Generierte Sprache:**
 - ❑ Alle durch Anwendungen der Regeln einer Sprache erzeugbaren Sätze



- Einfache Konstrukte, um Konstruktionsregeln für Zeichenketten festzulegen:
 - „Worte“ a, b , etc.
 - Sequenz: pq
 - Auswahl: $p + q$
 - Iteration: p^*

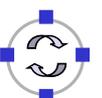


- Mit L beginnende Binärzahlen über L und O :

$$L(L + O)^*$$

- Bezeichner einer Programmiersprache, die mit einem Buchstaben anfangen müssen:

$$(a + b + \dots + z)(a + b + \dots + z + 0 + 1 + \dots + 9)^*$$



- Festlegung der Syntax von Kunstsprachen:
 - Ersetzungsregeln der Form

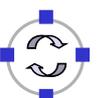
$$\text{linkeSeite} ::= \text{rechteSeite}$$

- `linkeSeite` ist Name des zu definierenden Konzepts
- `rechteSeite` gibt Definition in Form einer Liste von Sequenzen aus Konstanten und anderen Konzepten (evtl. einschließlich dem zu definierenden!). Listenelemente sind dabei durch `|` getrennt.
- Sprechweise:
 - Definierte Konzepte: Nichtterminalsymbole
 - Konstanten: Terminalsymbole



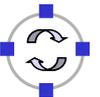
- Bezeichner

```
< Ziffer >      ::= 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 0
< Buchstabe >   ::= a | b | c | . . . | z
< Zeichenkette > ::= < Buchstabe > |
                    < Ziffer > |
                    < Buchstabe > < Zeichenkette > |
                    < Ziffer > < Zeichenkette >
< Bezeichner > ::= < Buchstabe > |
                    < Buchstabe > < Zeichenkette >
```



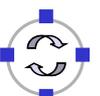
□ Syntax für Pseudo-Code-Algorithmen

```
<atom> ::= 'addiere 1 zu x' | ...
<bedingung> ::= 'x=0' | ...
<sequenz> ::= <block> ; <block>
<auswahl> ::= falls <bedingung> dann <block> |
               falls <bedingung> dann <block>
               sonst <block>
<schleife> ::= wiederhole <block> bis <bedingung> |
               solange <bedingung> führe aus <block>
<block> ::= <atom> | <sequenz> |
            <auswahl> | <schleife>
```



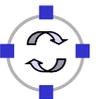
□ Achtung!

- Die vorige Folie zeigt ein Beispiel einer BNF zur Beschreibung von Pseudo-Code-Algorithmen
- D.h. „falls“, „solange“, etc. sind darin Terminale und gehören nicht zu den erlaubten Mitteln einer BNF
- „...“ ist „Meta-Zeichen“ und keine gültige BNF-Notation! Es soll damit im Beispiel ausgedrückt werden, dass weitere Definitionen alternativer Anweisungen etc. definiert werden können.

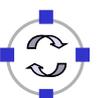


- BNF einer BNF – „Meta-Beschreibung“! :o)
 - Inhalte von Anführungszeichen (z.B. ' | ') sind als Terminale zu verstehen

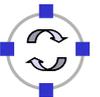
```
<BNF> ::= <Regel> | <BNF> <NeueZeile> <Regel>
<Regel> ::= <NichtTerminal> ' ::= ' <Liste>
<Liste> ::= <NichtTerminal> | <Terminal> |
           <Liste><Liste> |
           <Liste> ' | ' <Liste>
<NichtTerminal> ::= '<' <Zeichenkette> '>'
<Terminal> ::= <Zeichenkette> (Oder nach Bedarf)
<NeueZeile> ::= '\n' (Zeilenumbruch)
<Zeichenkette> Wie im ersten Beispiel
```



- Daten: zu verarbeitende Informationseinheiten
- Datentypen: Zusammenfassung „gleichartiger“ Daten und auf ihnen erlaubter Operationen
- Algebra (mathematisch): (Werte-)Menge plus Operationen
- Daher: Algebren als Abstraktion von Datentypen



- Algebra = Wertemenge plus Operationen (mathematisches Konzept)
 - Beispiel: Natürliche Zahlen \mathbb{N} mit $+$, $-$, $*$, \div , etc.
- Wertemengen werden in der Informatik als Sorten bezeichnet
- Operationen entsprechen Funktionen, werden durch *Algorithmen* realisiert
- *mehrsortige Algebra* = Algebra mit mehreren Sorten
 - Beispiel: Natürliche Zahlen plus Wahrheitswerte mit $+$, $-$, $*$, \div , auf Zahlen, \neg , \wedge , \vee , ... auf Wahrheitswerten, $=$, $<$, $>$, \leq , ... als Verbindung
- Datentyp (im Gegensatz zum mathematischen Konzept der Algebra): Interpretierbare Werte mit ausführbaren Operationen.



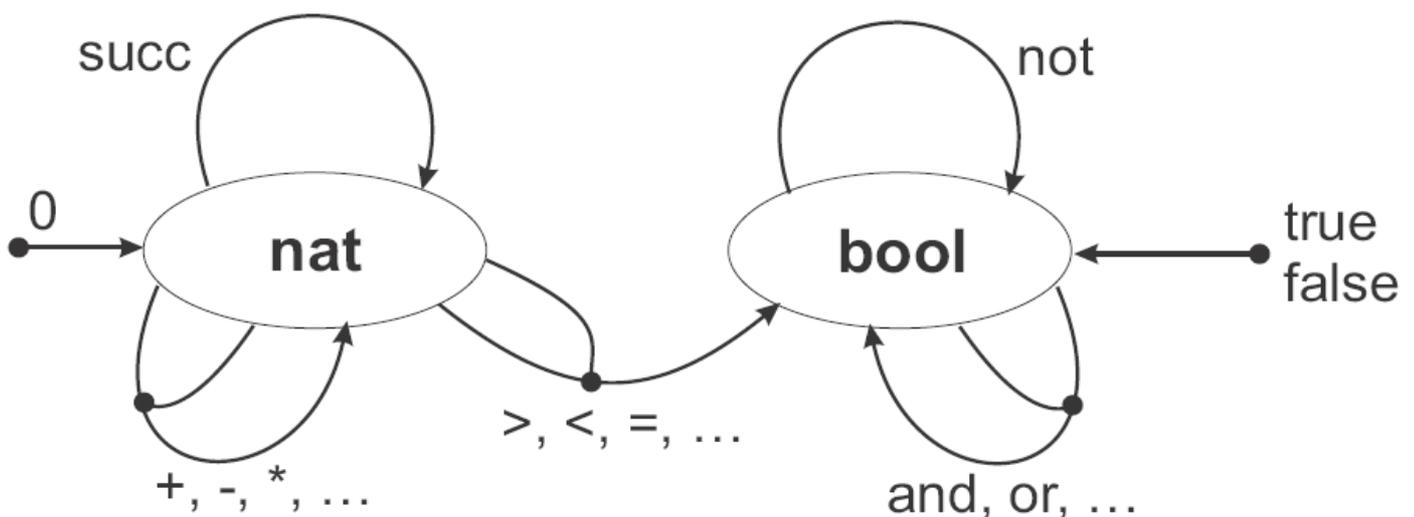
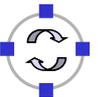
- Begriff der Signatur:
 - Formalisierung der Schnittstellenbeschreibung eines Datentyps
 - Angabe der (Bezeichner / Namen der) Sorten
 - Angabe der (Bezeichner / Namen der) Operationen
 - Stelligkeit der Operationen
 - Sorten der einzelnen Parameter
 - *Konstanten* als nullstellige Operationen



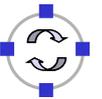
```

type nat
sorts nat, bool
functions
    0      :      → nat
    succ : nat → nat
    +      : nat × nat → nat
    ≤      : nat × nat → bool
    ...
  
```

- Die Funktion 0 hat keinen Eingabetyp (ist also eine nullstellige Funktion), daher steht vor dem Pfeil nichts!



- **boolean**, auch **bool**: Datentyp der Wahrheitwerte
- Werte: { **true**, **false** }
- Operationen:
 - \neg , auch **not**: logische Negation
 - \wedge , auch **and**: logisches Und
 - \vee , auch **or**: logisches Oder
 - \Rightarrow : Implikation



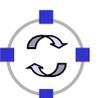
- Operationen definiert durch *Wahrheitstafeln*:

	\neg
false	true
true	false

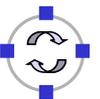
	\wedge	false	true
false	false	false	false
true	false	false	true

	\vee	false	true
false	false	false	true
true	true	true	true

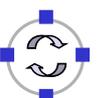
- $p \Rightarrow q$ ist definiert als $\neg p \vee q$



- **integer**, auch **int**: Datentyp der ganzen Zahlen
- Werte: { . . . , - 2, - 1, 0, 1, 2, 3, 4, . . . }
- Operationen +, -, ·, ÷, **mod**, **sign**, >, <,
 - +: **int** × **int** → **int**
Addition, 4 + 3 ↦ 7
 - **mod**: **int** × **int** → **int**
Rest bei Division, 19 **mod** 7 ↦ 5
 - **sign**: **int** → { - 1, 0, 1 }
Vorzeichen, **sign**(7) ↦ 1, **sign**(0) ↦ 0, **sign**(- 7) ↦ - 1,
 - >: **int** × **int** → **bool**
Größerrelation: 4 > 3 ↦ **true**
 - Weiter übliche Operationen, insbesondere in folgenden Beispielen **abs** zur Berechnung des Absolutbetrags, **odd** und **even**



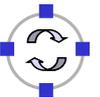
- **char**: Zeichen in Texten { A, .., Z, a, .. } mit Operation =
- **string**: Zeichenketten über **char**
 - Gleichheit: =
 - Konkatination („Aneinanderhängen“): +
 - Selektion des *i*-ten Zeichens: **s**[*i*]
 - Länge: **length**
 - jeder Wert aus **char** wird als ein **string** der Länge 1 aufgefasst, wenn er wie folgt notiert wird: 'A'
 - **empty** als leerer **string**
 - weitere sinnvolle Operatoren, etwa **substring**



- **array**: „Felder“ mit Werten eines Datentyps als Eintrag, Ausdehnung fest vorgegeben
- Definition:

```
array 1..3 of int;  
array 1..3, 1..3 of int;
```

- Operationen:
 - Gleichheit =
 - Selektion eines Elements: $A[n]$ oder $A[1, 2]$
 - Konstruktion eines Feldes: $(1, 2, 3)$ oder $((1, 2, 3), (3, 4, 5), (6, 7, 8))$



1. Die **int**-Werte $\dots, -2, -1, 0, 1, \dots$ sind **int**-Terme.
2. Die **bool**-Werte **true** und **false** sind **bool**-Terme
3. Sind t, u **int**-Terme, so sind auch $(t + u), (t - u), (t * u), (t \div u), \text{sign}(t), \text{abs}(t)$ **int**-Terme.
4. Sind t, u **bool**-Terme so sind auch $(t \wedge u), (t \vee u), (\neg t)$ **bool**-Terme.
5. Sind t, u **int**-Terme, so sind $(t = u), (t < u), (t > u), \dots$ **bool**-Terme.
6. Ist b ein **bool**-Term, und sind t, u **int**-Terme, so ist auch **if b then t else u fi** ein **int**-Term.
7. Nur die durch diese Regeln gebildeten Zeichenketten sind **int**-Terme.



- Bedingte Terme:

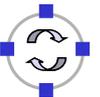
```
if b then t else u fi
```

- b boolescher Term, t und u zwei Terme gleicher Sorte

- Auswertung bedingter Terme (am Beispiel):

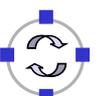
```
if true then t else u fi ↦ t
if false then t else u fi ↦ u
if true then 3 else ⊥ fi ↦ 3
if false then 3 else ⊥ fi ↦ ⊥
```

- Im Gegensatz zu Operationen erzwingt ein Teilausdruck, der undefiniert ist, nicht automatisch die Undefiniertheit des Gesamtterms!



- Auswertung von „innen nach außen“ (unter Beachtung von Klammern und Vorrangregeln), bei bedingten Termen wird zuerst die Bedingung ausgewertet.

```
1+ if true V ¬ false then 7 · 9 + 7 - 6 else abs(3 - 8) fi
↦ 1+ if true V true then 7 · 9 + 7 - 6 else abs(3 - 8) fi
↦ 1+ if true then 7 · 9 + 7 - 6 else abs(3 - 8) fi
↦ 1 + 7 · 9 + 7 - 6
↦ 1 + 63 + 7 - 6
↦ 64 + 7 - 6
↦ 71 - 6
↦ 65
```



- ❑ Algorithmenbegriff
- ❑ Terminierung, Determinismus, nichtdeterminierte vs. determinierte Algorithmen
- ❑ Algorithmenbausteine
- ❑ Algorithmenbeschreibung: Sprachen und Grammatiken
- ❑ Elementare Datentypen: `bool`, `integer`, Zeichenketten und Felder
- ❑ Terme: Bildung und Auswertung
- ❑ Literatur: Saake/Sattler: *Algorithmen und Datenstrukturen*, Kapitel 2

