TU Ilmenau, Fakultät IA
FG Telematik/Rechnernetze
Prof. Dr.-Ing. G. Schäfer
http://www.tu-ilmenau.de/telematik/pua

TECHNISCHE UNIVERSITÄT ILMENAU

# Programmierung und Algorithmen WS 23/24
# Übungsblatt 6

---

**Die Lösungen der Aufgaben sind bis zum 26.11.23, 23:59 Uhr abzugeben.**
**Die Besprechung der Aufgaben erfolgt in KW 48.**

---

**Aufgabe 1** (Vor- und Nachbedingungen) **2 + 2 + 2 Punkte**

Beweisen Sie *formal* (siehe Kapitel 6, Folie 27 bis 30), dass folgende Aussagen wahr sind. Es gelte $X, Y \in \mathbb{Z}$.

(a) `{X ≥ 0} if Y ≥ 0 then X := X + Y else X := X - Y fi {X ≥ 0}`

(b) `{X ≥ 0 ∧ Y ≥ 0} while X ≠ 0 do Y := Y + 1; X := X - 1 od {Y ≥ 0}`

(c) `{X ≥ 0} while true do X := X + 1 od {X = 0}`

**Aufgabe 2** (Korrektheit imperativer Algorithmen) **2 + 1 + 4 Punkte**

Die Fibonacci-Folge sei wie folgt definiert:

$$f_0 = f_1 = 1 \text{ sowie } f_n = f_{n-1} + f_{n-2} \text{ für } n \in \mathbb{N}, n \geq 2$$

Der folgende imperative Algorithmus berechnet bei Eingabe `N` die Fibonacci-Zahl $f_{\mathtt{N}}$:

```
FIB: var N, A, B, C, X : int;
     input N;
     A := 1; B := 1; X := 0;
     while X ≠ N do
         C := A + B;
         A := B;
         B := C;
         X := X + 1
     od;
     output A.
```

(a) Geben Sie eine sinnvolle Vorbedingung `{VOR}` und eine sinnvolle Nachbedingung `{NACH}` an.

**Hinweis:** Eine Nachbedingung ist nur dann sinnvoll, wenn sich aus ihr direkt die Korrektheit des Algorithmus ergibt. Sie sollte dementsprechend eine Aussage über die Ausgabe `A` beinhalten.

(b) Geben Sie eine geeignete Scheifeninvariante an und beweisen Sie die partielle Korrektheit des Algorithmus.

(c) Begründen Sie kurz, dass der Algorithmus terminiert, sofern am Anfang Ihre Vorbedingung `{VOR}` gilt.

**Hinweis:** Ausdrücke der Form $f_{\mathtt{N}}$ können natürlich in `VOR`, `NACH` und `P` vorkommen.

**Aufgabe 3** (Korrektheit imperativer Algorithmen) **5 Punkte**

Gegeben sei der Algorithmus `GAUSS`. Zeigen Sie, dass folgende Aussage gilt:

$$\{N \geq 0\}\ \texttt{GAUSS}\ \{S = N * (N + 1) / 2\}$$

```
GAUSS: var N, C, S : int;
    input N;
    C := 0;
    S := 0;
    while C != N do
        C := C + 1;
        S := S + C;
    od
    output S.
```

**Aufgabe 4** (Post'sches Korrespondenzproblem in Java) **1 + 2 + 4 Punkte**

Das Post'sches Korrespondenzproblem (siehe auch Kapitel 6, Folie 17) ist im Allgemeinen nicht entscheidbar. Schränkt man die Suche allerdings auf Korrespondenzen mit einer maximalen Länge $k$ ein, wird das Problem lösbar.
Entwerfen Sie ein Java-Programm, welches das Post'sche Korrespondenzproblem mit der Beschränkung $k = 16$ löst. Die Eingaben $\alpha, \beta$ des Problems sollen dabei durch zwei String-Arrays (`String[]`) repräsentiert werden (welche Sie der Einfachheit halber z. B. fest in Ihr Programm kodieren dürfen).

(a) Ihr Programm soll zunächst überprüfen, ob $\alpha$ und $\beta$ die gleiche Länge haben.

(b) Sei $A = \{0, 1, \ldots 9, a, b, \ldots, z\}$. Es soll überprüft werden, ob alle Worte aus $\alpha$ und $\beta$ über dem Alphabet A (Dezimalziffern und Kleinbuchstaben) gebildet wurden und mindestens ein Zeichen lang sind.

(c) Sind die ersten beiden Bedingungen erfüllt, so soll nach einer Korrespondenz gesucht werden. Sofern eine solche existiert, soll sowohl die Korrespondenz (Folge von Indizes aus $\alpha$ bzw. $\beta$) als auch das resultierende zusammengesetzte Wort ausgegeben werden.

**Hinweis:** Zur Lösung des Problems eignet sich der rekursive Ansatz des *Backtrackings*.

**Aufgabe 5** (Asymptotisches Verhalten) **4 + 1 Punkte**

Für beliebige Werte $a > 1$ und $b > 1$ wächst die Funktion $f(x) = x^a$ langfristig langsamer als die Funktion $g(x) = b^x$. Für große Werte von $a$ (z.B. $a = 10$) und kleine Werte von $b$ (z.B. 1.05) sind jedoch zunächst die Funktionswerte von $f$ größer als die Werte von $g$.

(a) Schreiben Sie ein Java-Programm, dass $a$ und $b$ von der Kommandozeile einliest und die erste natürliche Zahl $x \geq 2$ ausgibt, für die $f(x) < g(x)$ gilt.

**Hinweis:** Den Wert $x^y$ berechnen sie in Java mittels `Math.pow(x,y)`.

(b) Für welches solche $x$ gilt $x^{10} < 1.05^x$?