

Programmierung und Algorithmen WS 25/26

Übungsblatt 6

Die Lösungen der Aufgaben sind bis zum 30.11.25, 23:59 Uhr abzugeben.

Die Besprechung der Aufgaben erfolgt in KW 48.

Aufgabe 1 (Vor- und Nachbedingungen)

2 + 2 + 2 Punkte

Beweisen Sie *formal* (siehe Kapitel 6, Folie 27 bis 30), dass folgende Aussagen wahr sind. Es gelte $X, Y \in \mathbb{Z}$.

- (a) $\{X \geq 0\}$ **if** $Y \geq 0$ **then** $X := X + Y$ **else** $X := X - Y$ **fi** $\{X \geq 0\}$
- (b) $\{X \geq 0 \wedge Y \geq 0\}$ **while** $X \neq 0$ **do** $Y := Y + 1$; $X := X - 1$ **od** $\{Y \geq 0\}$
- (c) $\{X \geq 0\}$ **while** **true** **do** $X := X + 1$ **od** $\{X = 0\}$

Aufgabe 2 (Korrektheit imperativer Algorithmen)

2 + 4 + 1 Punkte

Der folgende imperative Algorithmus berechnet die Fakultät $N!$ der Eingabe N .

```
1  FAC: var N, F, C : int;  
2      input N;  
3      C := 0;  
4      F := 1;  
5      while C  $\neq$  N do  
6          C := C + 1;  
7          F := F * C;  
8      od  
9      output F.
```

- (a) Geben Sie eine sinnvolle Vorbedingung $\{VOR\}$ und eine sinnvolle Nachbedingung $\{NACH\}$ an.

Hinweis: Eine Nachbedingung ist nur dann sinnvoll, wenn sich aus ihr direkt die Korrektheit des Algorithmus ergibt. Sie sollte dementsprechend eine Aussage über die Ausgabe F beinhalten.

- (b) Geben Sie eine geeignete Scheifeninvariante an und beweisen Sie die partielle Korrektheit des Algorithmus.
- (c) Begründen Sie kurz, dass der Algorithmus terminiert, sofern am Anfang Ihre Vorbedingung $\{VOR\}$ gilt.

Aufgabe 3 (Korrektheit imperativer Algorithmen)

5 Punkte

Gegeben sei der Algorithmus GAUSS. Zeigen Sie, dass folgende Aussage gilt:

$$\{N \geq 0\} \text{ GAUSS } \{S = N * (N + 1) / 2\}$$

```

1  GAUSS: var N, C, S : int;
2      input N;
3      C := 0;
4      S := 0;
5      while C != N do
6          C := C + 1;
7          S := S + C;
8      od
9      output S.

```

Aufgabe 4 ($\mathcal{O}$ -Notation)

6 Punkte

Entscheiden Sie für jede der folgenden Aussagen, ob sie zutrifft oder nicht. Begründen Sie Ihre Antwort bitte kurz (z.B. durch Anwendung der Definitionen). Ohne Begründung kann Ihre Antwort nicht gewertet werden! Falls eine Aussage zutrifft, geben Sie bitte passende Konstanten c und n_0 an (vgl. Kapitel 6 Folie 53). Nehmen Sie (falls nötig) an, dass Logarithmus-Funktionen die Basis 2 haben.

- (a) $2^{42} = \mathcal{O}(16)$
- (b) $\frac{n^2}{n \cdot \log n} = \mathcal{O}(n)$
- (c) $n^2 = \mathcal{O}(1337 \cdot n)$
- (d) $10^8 \cdot n = \mathcal{O}(n^2)$
- (e) $n\sqrt{n} = \mathcal{O}(n^3)$
- (f) $\pi \cdot n^\pi = \mathcal{O}(n^\pi)$

Aufgabe 5 (Asymptotisches Verhalten)

4 + 1 Punkte

Für beliebige Werte $a > 1$ und $b > 1$ wächst die Funktion $f(x) = x^a$ langfristig langsamer als die Funktion $g(x) = b^x$. Für große Werte von a (z.B. $a = 10$) und kleine Werte von b (z.B. 1.05) sind jedoch zunächst die Funktionswerte von f größer als die Werte von g .

- (a) Schreiben Sie ein Java-Programm, dass a und b von der Kommandozeile einliest und die erste natürliche Zahl $x \geq 2$ ausgibt, für die $f(x) < g(x)$ gilt.

Hinweis: Den Wert x^y berechnen sie in Java mittels `Math.pow(x,y)`.

- (b) Für welches solche x gilt $x^{10} < 1.05^x$?