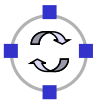
Programmierung und Algorithmen

Kapitel 5
Formale Algorithmenmodelle



Überblick

Motivation

Formale Algorithmenmodelle

Registermaschine

Abstrakte Maschinen

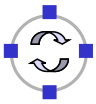
Markov-Algorithmen

Church´sche These



Motivation

- Bisher: Ausführung von Algorithmen auf abstrakter Ebene
- Nun: Entwicklung von Modellen für Maschinen, die Algorithmen ausführen
- Ziel: einfache Modelle
  - Näher an Computer als abstrakte Ausführung applikativer Algorithmen
  - Einfacher für mathematische Betrachtungen als bisherige Modelle
- Konkret: Registermaschine als einfaches Modell realer Computer
- Abstrakte Maschinen als vereinheitlichender Rahmen
- Markov-Algorithmen als einfach zu programmierende Maschinen auf Zeichenketten



Formale Algorithmenmodelle

- (Maschinennahe) Präzisierung des Algorithmenbegriffs: Registermaschine
  - Registermaschine besteht aus Registern B, C_0, , C_1, C_2, . . . , C_n, . . . und einem Programm.
  - B heißt Befehlszähler, C_0 heißt Arbeitsregister oder Akkumulator, C_n, $n \geq 1$ heißen Speicherregister
  - Jedes der Register enthält als Wert eine natürliche Zahl
  - **Konfiguration** der Registermaschine:

    $$(b, c_0, c_1, \ldots, c_n, \ldots)$$

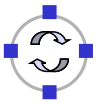
    mit Register B enthält Zahl b und
    für $n \geq 0$ gilt, das Register C_n enthält Zahl c_n



Registermaschine

- Programm einer Registermaschine
  - Programm = endliche Folge von Befehlen
  - Durch Anwendung eines Befehls wird die Konfiguration der Registermaschine geändert
  - Notation

$$(b, c_o, c_1, \ldots c_n, \ldots) \vdash (b', c'_0, c'_1, \ldots, c'_n, \ldots)$$



Ein- und Ausgabebefehle

`LOAD` i ,	$i \in \mathbb{N}_+$	$b' = b + 1$	$c'_0 = c_i$
`CLOAD` i ,	$i \in \mathbb{N}$	$b' = b + 1$	$c'_0 = i$
`STORE` i ,	$i \in \mathbb{N}_+$	$b' = b + 1$	$c'_i = c_0$

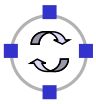
(bei diesen Operationen gilt grundsätzlich zusätzlich zu den spezifischen Erklärungen der folgenden Folien:
$c'_j = c_j$ für $j \neq 0$; bzw.
$c'_j = c_j$ für $j \neq 0 \wedge j \neq$ i bei `STORE` i
d.h.: Befehle haben keine „unspezifische Nebenwirkungen“ auf die aktuelle Konfiguration)



Arithmetische Befehle

`ADD` i ,	$i \in \mathbb{N}_+$	$b' = b + 1$	$c'_0 = c_0 + c_i$
`CADD` i ,	$i \in \mathbb{N}_+$	$b' = b + 1$	$c'_0 = c_0 + i$
`SUB` i ,	$i \in \mathbb{N}_+$	$b' = b + 1$	$c'_0 = \begin{cases} c_0 - c_i & \text{für } c_0 \geq c_i \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$
`CSUB` i ,	$i \in \mathbb{N}_+$	$b' = b + 1$	$c'_0 = \begin{cases} c_0 - i & \text{für } c_0 \geq i \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$
`MULT` i ,	$i \in \mathbb{N}_+$	$b' = b + 1$	$c'_0 = c_0 \cdot c_i$
`CMULT` i ,	$i \in \mathbb{N}_+$	$b' = b + 1$	$c'_0 = c_0 \cdot i$
`DIV` i ,	$i \in \mathbb{N}_+$	$b' = b + 1$	$c'_0 = \lfloor c_0 / c_i \rfloor$
`CDIV` i ,	$i \in \mathbb{N}_+$	$b' = b + 1$	$c'_0 = \lfloor c_0 / i \rfloor$

(bei diesen Operationen gilt grundsätzlich $c'_j = c_j$ für $j \neq 0$)



Sprung- und Stoppbefehle

- Sprungbefehle:

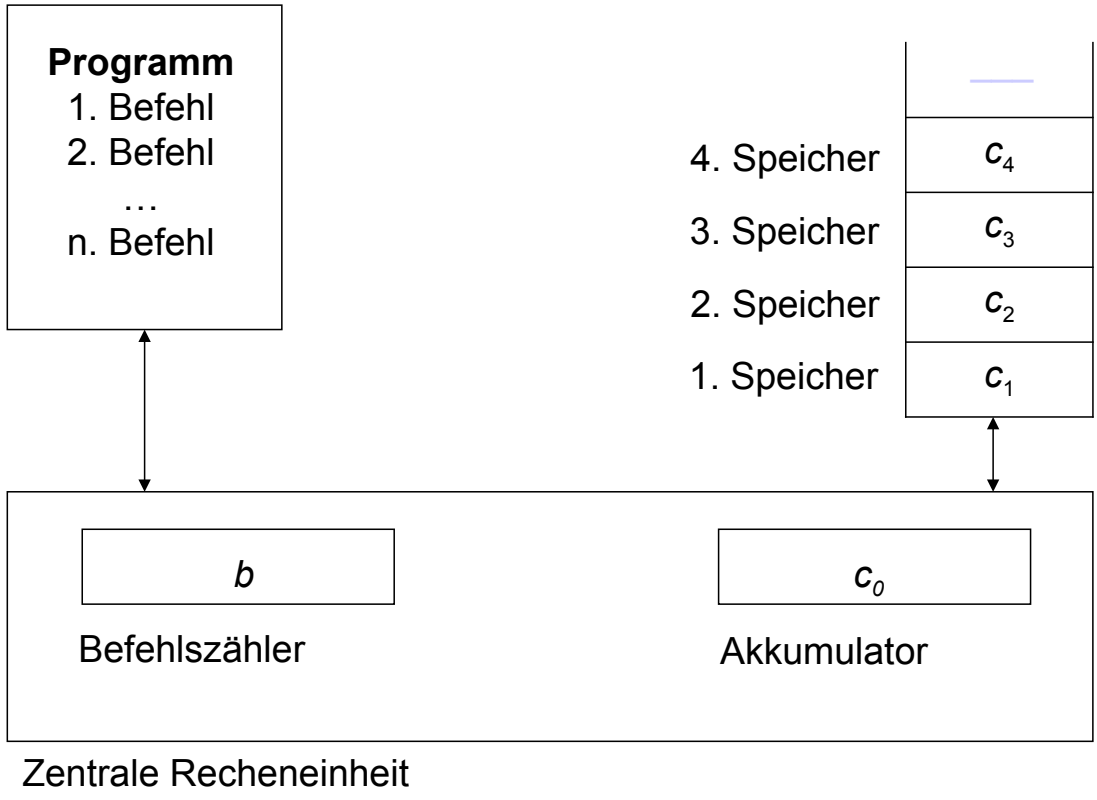
`GOTO` i ,	$i \in \mathbb{N}_+$	$b' = i$
`IF` $c_0 = 0$ `GOTO` i ,	$i \in \mathbb{N}_+$	$b' = \begin{cases} i & \text{falls } c_0 = 0 \\ b + 1 & \text{sonst} \end{cases}$

- Stoppbefehl:

`END` ,	$b' = b$	$c'_j = c_j$ *für* $j \geq 0$



Registermaschine: Aufbau



Beispiel Registermaschine M_1

```
1   LOAD 1
2   DIV 2
3   MULT 2
4   STORE 3
5   LOAD 1
6   SUB 3
7   STORE 3
8   END
```

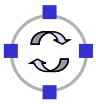
Beispiel Registermaschine M_1, 1. Ablauf

- Startkonfiguration

$$b = 1,\ c_0 = 0,\ c_1 = 32,\ c_2 = 5,\ c_3 = 0,$$

- Folge von Konfigurationen:

$$\begin{aligned}(1, 0, 32, 5, 0, \ldots) &\vdash (2, 32, 32, 5, 0, \ldots) \vdash (3, 6, 32, 5, 0, \ldots)\\ &\vdash (4, 30, 32, 5, 0, \ldots) \vdash (5, 30, 32, 5, 30, \ldots)\\ &\vdash (6, 32, 32, 5, 30, \ldots) \vdash (7, 2, 32, 5, 30, \ldots)\\ &\vdash (8, 2, 32, 5, 2, \ldots)\end{aligned}$$



Beispiel Registermaschine M_1, 2. Ablauf

- Startkonfiguration

$$b = 1,\ c_0 = 0,\ c_1 = 100,\ c_2 = 20,\ c_3 = 0,$$

- Folge von Konfigurationen:

$$\begin{aligned}(1, 0, 100, 20, 0, \ldots) &\vdash (2, 100, 100, 20, 0, \ldots)\\ &\vdash (3, 5, 100, 20, 0, \ldots)\\ &\vdash (4, 100, 100, 20, 0, \ldots)\\ &\vdash (5, 100, 100, 20, 100, \ldots)\\ &\vdash (6, 100, 100, 20, 100, \ldots)\\ &\vdash (7, 0, 100, 20, 100, \ldots)\\ &\vdash (8, 0, 100, 20, 0, \ldots).\end{aligned}$$

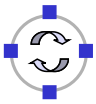


Registermaschine M_1, allgemeiner Ablauf

$b = 1, c_0 = 0, c_1 = n, c_2 = m, c_3 = 0$

- $n = q \cdot m + r$ mit $0 \leq r < m$
- d. h. $q = \lfloor n/m \rfloor$ ist ganzzahliges Ergebnis der Division von n durch m
- r ist der verbleibende Rest bei dieser Division

$(1, 0, n, m, 0, \ldots) \vdash (2, n, n, m, 0, \ldots) \vdash (3, q, n, m, 0, \ldots)$
$\vdash (4, q \cdot m, n, m, 0, \ldots) \vdash (5, q \cdot m, n, m, q \cdot m, \ldots)$
$\vdash (6, n, n, m, q \cdot m, \ldots) \vdash (7, r, n, m, q \cdot m, \ldots)$
$\vdash (8, r, n, m, r, \ldots)$



Berechnete Funktion

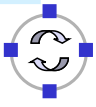
Eine Registermaschine M berechnet die Funktion

$f: \mathbb{N}^n \longrightarrow \mathbb{N}^m$

mit $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (y_1, y_2, \ldots, y_m)$ wenn es Zahlen $i_1, i_2, \ldots, i_m$ so gibt, dass M jede Konfiguration

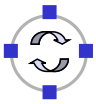
$$(1, 0, x_1, x_2, \ldots, x_n, 0, 0, \ldots)$$

in eine Konfiguration $(b, c_0, c_1, \ldots)$ überführt, für die b die Nummer einer `END`-Anweisung ist und $c_j = y_j$ für $1 \leq j \leq m$ gilt.



Erläuterung zur berechneten Funktion

- Die Registermaschine beginnt die Abarbeitung mit dem ersten Befehl
- Die Argumente bzw. Eingaben der zu berechnenden Funktion stehen dabei in den ersten *n* Speicherregistern $C_1, \ldots, C_n$
- Die Registermaschine beendet ihre Arbeit bei Erreichen eines `END`-Befehls
- Die Resultate bzw. Ausgaben stehen nach beendeter Abarbeitung in den vorab festgelegten Speicherregistern $C_{i_1}, C_{i_2}, \ldots, C_{i_m}$



Berechnete Funktion: Beispiel

```
1   LOAD 1
2   ADD 2
3   STORE 3
4   END
```

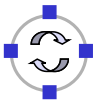
- Berechnet aus Werten *x* und *y* in Registern C_1 und C_2 die Summe $x + y$ und legt diese im Register C_3 ab
- Mit $i_1 = 3$ wird die Addition realisiert



Registermaschine M_2

```
1   CLOAD 1
2   STORE 3
3   LOAD 2
4   IF c0 = 0 GOTO 12
5   LOAD 3
6   MULT 1
7   STORE 3
8   LOAD 2
9   CSUB 1
10  STORE 2
11  GOTO 4
12  END
```

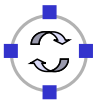
- $f_2 : \mathbb{N}^2 \longrightarrow \mathbb{N}$ mit Ergebnis im dritten Speicherregister c_3 (also $i_1 = 3$)



Beispiel für M_2

(1, 0, 5, 3, 0, . . .)
⊢ (2, 1, 5, 3, 0, . . .) ⊢ (3, 1, 5, 3, 1, . . .) ⊢ (4, 3, 5, 3, 1, . . .)
⊢ (5, 3, 5, 3, 1, . . .) ⊢ (6, 1, 5, 3, 1, . . .) ⊢ (7, 5, 5, 3, 1, . . .)
⊢ (8, 5, 5, 3, 5, . . .) ⊢ (9, 3, 5, 3, 5, . . .) ⊢ (10, 2, 5, 3, 5, . . .)
⊢ (11, 2, 5, 2, 5, . . .) ⊢ (4, 2, 5, 2, 5, . . .) ⊢ (5, 2, 5, 2, 5, . . .)
⊢ (6, 5, 5, 2, 5, . . .) ⊢ (7, 25, 5, 2, 5, . . .) ⊢ (8, 25, 5, 2, 25, . . .)
⊢ (9, 2, 5, 2, 25, . . .) ⊢ (10, 1, 5, 2, 25, . . .) ⊢ (11, 1, 5, 1, 25, . . .)
⊢ (4, 1, 5, 1, 25, . . .) ⊢ (5, 1, 5, 1, 25, . . .) ⊢ (6, 25, 5, 1, 25, . . .)
⊢ (7, 125, 5, 1, 25, . . .) ⊢ (8, 125, 5, 1, 125, . . .)
⊢ (9, 1, 5, 1, 125, . . .) ⊢ (10, 0, 5, 1, 125, . . .)
⊢ (11, 0, 5, 0, 125, . . .) ⊢ (4, 0, 5, 0, 125, . . .)
⊢ (12, 0, 5, 0, 125, . . .)

Dieses konkrete Beispiel ergibt $f_1(5, 3) = 125$.

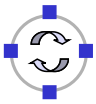


Bedeutung von M_2

Konfiguration (1, 0, x, y, 0, . . .):

- Nach Abarbeitung der Befehle 1 – 3 ergibt sich (4, y, x, y, 1, . . .).
  - $y = 0$: `END`-Anweisung; (12, y, x, y, 1) = (12, 0, x, 0, 1) mit Ergebnis 1.
  - Falls $y \neq 0$: Befehle 5 – 11; (4, y - 1, x, y, 1 · x, . . .).
  - y - 1 = 0: (12, y - 1, x, y - 1, x, . . .) = (12, 0, x, 0, x, . . .) mit Ergebnis x.
  - y - 1 ≠ 0: Befehle 5 – 11; (4, y - 2, x, y - 2, x^2 , . . .).
  - y - 2 = 0: (12, y - 2, x, y - 2, x^2 , . . .) = (12, 0, x, 0, x^2 , . . .) mit Ergebnis x^2 .
  - y - 2 ≠ 0: Befehle 5 – 11 etc.
- Abbruch allgemein (12, y - k, x, y - k, x^k , . . .) = (12, 0, x, 0, x^y , . . .) (wegen $y = k$).

Berechnete Funktion: $f_2(x, y) = x^y$



Registermaschine M_3

- Programm

```
1   LOAD 1
2   IF c0 = 0 GOTO 4
3   GOTO 3
4   END
```

- Berechnet die Funktion:

$$f_3(x) = \begin{cases} 0 & \text{falls } x = 0 \\ \text{undefiniert} & \text{sonst} \end{cases}$$

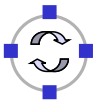


Registermaschine M_4

Beispiel für komplexeres Programm:

$$f_4(x) = \begin{cases} 0 & \text{falls } x \text{ keine Primzahl ist} \\ 1 & \text{falls } x \text{ eine Primzahl ist} \end{cases}$$

Wir überprüfen zuerst, ob die Eingabe $x \leq 1$ ist. Sollte dies der Fall sein, so ist x keine Primzahl und wir schreiben in das zweite Speicherregister eine 0 und beenden die Arbeit.
Ist dagegen $x \geq 2$, so testen wir der Reihe nach, ob x durch 2, 3, 4, . . . x - 1 teilbar ist. Gibt einer dieser Tests (für X > 2) ein positives Resultat, so ist x keine Primzahl.
Fallen dagegen alle diese Tests negativ aus (oder ist x = 2), so ist x prim.



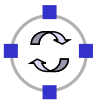
Programm M_4

1	`LOAD 1`	Laden von x
2	`CSUB 1`	Berechnen von x - 1
3	`IF` c_0 `= 0 GOTO 19`	Test, ob $x \leq 1$
4	`CLOAD 2`	Laden des ersten Testteilers t=2
5	`STORE 2`	Speichern des Testteilers t
6	`LOAD 1`	
7	`SUB 2`	Berechnen von x - t
8	`IF` c_0 `= 0 GOTO 21`	Test, ob $t \leq x$
9	`LOAD 1`	
10	`DIV 2`	Befehle 9 – 14 berechnen Rest
11	`MULT 2`	bei ganzzahliger Teilung x / t
12	`STORE 3`	(siehe Beispiel M_1)
13	`LOAD 1`	
14	`SUB 3`	



Programm M_4

```
15   IF c0 = 0 GOTO 19     Test, ob t Teiler
16   LOAD 2
17   CADD 1                Erhöhung des Testteilers um 1
18   GOTO 5                Start des nächsten Tests
19   STORE 2               Speichern des Ergebnisses 0
20   GOTO 23
21   CLOAD 1
22   STORE 2               Speichern des Ergebnisses 1
23   END
```



Weitere Maschinenmodelle

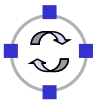
- Gemeinsamkeit bisheriger Modelle (Registermaschine, applikative und imperative Algorithmen)
  - Kontrollstrukturen + elementare, von einer „Maschine“ ausführbare Einzelschritte
- Allgemeines Modell für deterministische Algorithmen: abstrakte Maschine
  - Ermöglicht den Vergleich wichtiger Eigenschaften wie *Laufzeit* und *Terminierung* unabhängig von einem konkreten Algorithmenmodell bzw. Programmierparadigma
- Weitere Spezialisierungen abstrakter Maschinen: Turing-Maschine, Markov-Algorithmen



Abstrakte Maschine

$M = (X, Y, K, \boldsymbol{\alpha}, \omega, T, \sigma)$,

X Menge von *Eingabewerten*
Y Menge von *Ausgabewerten*
K Menge von *Konfigurationen*
$\boldsymbol{\alpha}$: $X \rightarrow K$ *Eingabefunktion*
ω: $K \rightarrow Y$ *Ausgabefunktion*
T: $K \rightarrow K$ *Transitionsfunktion*
σ: $K \rightarrow$ `bool` *Stoppfunktion* (markiert Endkonfiguration)



Abstrakte Maschinen: Endkonfigurationen

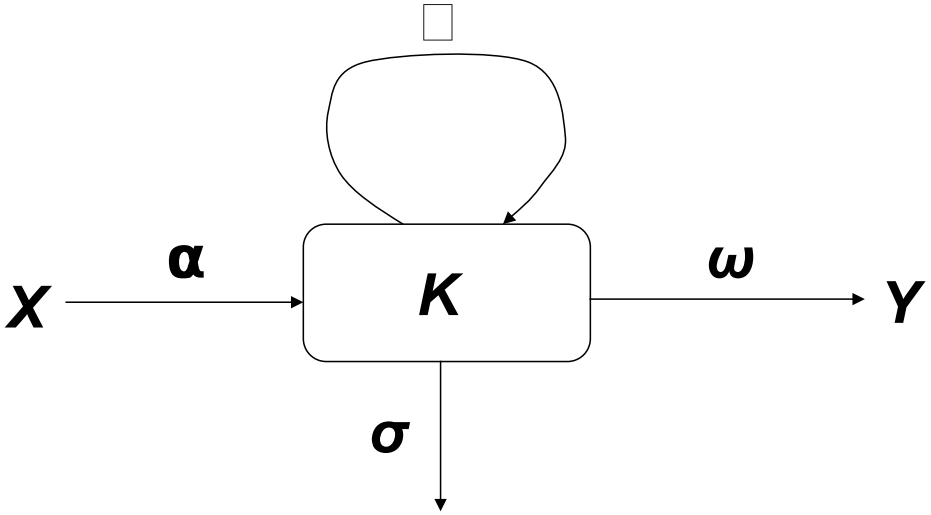
Endkonfigurationen zu M:

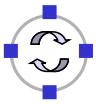
$$E = \{ k \in K \mid \sigma(k) = \texttt{true} \}$$

Endkonfigurationen sind Maschinenzustände, in denen eine Berechnung terminiert.



Abstrakte Maschinen: graphisch





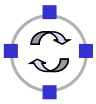
Abstrakte Maschinen: Arbeitsweise

Eine abstrakte Maschine *arbeitet* folgendermaßen:

1. Ein Eingabewert $x \in X$ bestimmt die Anfangskonfiguration
   $k_0 = \alpha(x) \in K$.
2. Wir überführen mittels T Konfigurationen in Folgekonfigurationen, also

$$k_1 = T(k_0),\ k_2 = T(k_1),\ \ldots$$

   bis zum ersten Mal eine Endkonfiguration $k_i \in E$ erreicht wird. Dies braucht natürlich niemals einzutreten.
3. Wird eine Endkonfiguration $k_i \in E$ erreicht, so wird der Ausgabewert $\omega(k_i) \in Y$ ausgegeben.



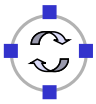
Abstrakte Maschinen: Berechnung

Bei Eingabe von $x \in X$ gibt es also zwei Möglichkeiten:

1. Die Maschine hält nie an.
2. Die Maschine hält und gibt einen eindeutig bestimmten Ausgabewert $y \in Y$ aus.

Auf diese Weise berechnet die Maschine M eine partielle Funktion

$$f_M : X \rightarrow Y$$



Abstrakte Maschinen: Laufzeit

Die Laufzeit einer abstrakten Maschine M für die Eingabe $x \in X$ ist

$$t_M(x) = (\mu n)\,[\sigma\,(T^n\,(\boldsymbol{\alpha}\,(x)))]$$

Hierbei ist $(\mu n)\,[B]$ die kleinste natürliche Zahl $n \in \mathbb{N} = \{ 0, 1, 2, \ldots \}$, so dass die Bedingung $B =$ **`true`** wird und B für alle $m \leq n$ definiert ist.

Gibt es *keine* solche Zahl $n \in \mathbb{N}$, so ist $t_M(x) = \perp$ (undefiniert).



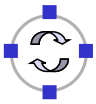
Abstrakte Maschinen: Berechnete Funktion

Die von einer abstrakten Maschine *M* berechnete Funktion

$$f_M : X \rightarrow Y$$

ist gegeben durch

$$f_M(x) = \omega\,(T^{tM(x)}\,(\alpha(x)))\,; \quad \text{ist } t_M(x) = \perp\,, \text{ so ist } f_M(x) = \perp\,.$$



Abstrakte Maschinen: Beispiel

- $X = Y = \mathbb{N}$
- $K = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$
- $\alpha(n) = (1, n)$
- $T((m, n)) = (m * n, n - 1)$
- $\omega((m, n)) = m$
- $\sigma((m, n)) = \begin{cases} \texttt{true}, & \text{falls } n = 0 \\ \texttt{false} & \text{sonst} \end{cases}$

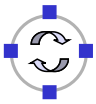
Laufzeit? Berechnete Funktion?



Applikative Algorithmen als AM (nur ganzzahlige E/A)

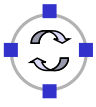
$$f_i(u_{i,1}, \ldots, u_{i,ni}) = t_i(u_{i,1}, \ldots, u_{i,ni}),\ i = 1, \ldots, m.$$

- $X = \mathbb{Z}^{n1}$
- $Y = \mathbb{Z}$
- K = Terme ohne Unbekannte
- $\alpha(a_1, \ldots, a_{n1})$ = der Term "$f_1(a_1, \ldots a_{n1})$"
- $\omega(t)$ = der Wert von t
- T : Termauswertung aufgrund der Funktionsdefinitionen.
  Durch "Berechnungsvorschrift" deterministisch machen!
  Z.B. durch die Forderung, stets das erste Auftreten von links eines Funktionsaufrufes mit Konstanten $f_i(b_1, \ldots, b_{ni})$ mit $b_j \in \mathbb{Z}$, j=1, ..., n_i, durch die rechte Seite $t_i(b_1, \ldots, b_{ni})$ zu ersetzen.
- $\sigma(t) = \begin{cases} \texttt{true}, & \text{falls } t = b \in \mathbb{Z} \text{ (Konstante) ist} \\ \texttt{false} & \text{sonst} \end{cases}$



Imperative Algorithmen als AM (nur ganzzahlige E/A)

```
PROG:   var      V, W, ...: int;
                 P,Q, ...: bool;
        input    X_1, ... , X_n;
                 β̄
        output   Y_1, . . . , Y_m.
```



Imperative Algorithmen als AM II

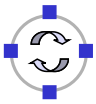
- $X = \mathbb{Z}^n$, $Y = \mathbb{Z}^m$
- $K = \{ (Z, \beta) \mid Z$ Zustand, β Anweisung $\}$
  Z: aktueller Zustand, β : noch auszuführende Anweisung
- $\alpha (a_1, \ldots, a_n) = (Z_0, \overline{\beta})$, wobei

  $Z_0(X_i) = a_i$, $i = 1, \ldots, n$, und

  $Z_0(Y) = \perp$ für $Y \neq X_i$, $i = 1, \ldots, n$.
- $\omega (Z, \beta) = (Z(Y_1), \ldots, Z(Y_m))$
- $T (Z, \beta) = (Z', \beta')$, wobei

  Z' = Zustand nach Ausführung der nächsten Anweisung

  β' = Rest der noch auszuführenden Anweisung
- $\sigma (t) = \begin{cases} \texttt{true}, & \text{falls } \beta \text{ leer ist (keine Anweisungen mehr)} \\ \texttt{false} & \text{sonst} \end{cases}$



Markov-Algorithmen

- Einfaches mathematisch orientiertes Modell als Spezialisierung abstrakter Maschinen
- Programmtechnisch einfach in einen Interpretierer für Markov-Tafeln umzusetzen

$A = (a_1, \ldots, a_n)$ Alphabet

A^* die Menge der Worte (Texte) über A



Markov-Regeln

Ein Markov-Algorithmus wird definiert durch Regeln der Form:

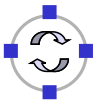
$$\varphi \rightarrow \psi \text{ mit } \varphi, \psi \in A^*$$

Bedeutung der Regel: Wort φ soll durch das Wort ψ ersetzt werden.

Angewendet auf ein Wort $\xi \in A^*$ entsteht durch Regelanwendung auf eindeutige Weise ein neues Wort $g[\varphi \rightarrow \psi](\xi)$:

- Ist φ ein Teilwort von ξ, also $\xi = \mu\varphi\nu$ für $\mu, \nu \in A^*$, und ist φ an dieser Stelle nach μ das erste Auftreten (von links) von φ in ξ, so ist $g[\varphi \rightarrow \psi](\xi) = \mu\psi\nu$, d. h. φ wird (nur!) an dieser Stelle durch ψ ersetzt.
- Ist φ kein Teilwort von ξ, so ist $g[\varphi \rightarrow \psi](\xi) = \xi$, d. h., es passiert nichts.

Achtung: $\varphi, \psi \in A^*$ bedeutet: φ oder ψ können auch ε (leeres Wort) sein!



Beispiel für Regeln

Sei $A = (0, 1)$. Wir wenden die Regel 01 → 10 sukzessive an.

1 1 0 <u>0 1</u> 0 1 0 1 1 → 1 1 <u>0 1</u> 0 0 1 0 1 1

→ 1 1 1 0 0 <u>0 1</u> 0 1 1

→ 1 1 1 0 <u>0 1</u> 0 0 1 1

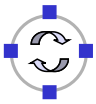
→ 1 1 1 <u>0 1</u> 0 0 0 1 1

etc.



Original-Markov-Algorithmen

- Originalvorgehensweise:
  1. Gehe alle Regeln *der Reihe* nach durch.
  2. Wenn eine Regel anwendbar ist, wende sie an der *linkesten möglichen* Stelle an.
  3. Starte von vorne.
- Terminierung:
  - Einige Regeln als Terminierungsregeln markieren, *oder*
  - Terminiere wenn keine Regel mehr anwendbar ist.
- Hier: an Rechnermodelle angepasste Variante, die Markov-Tafeln.



Markov-Tafel

Eine Markov-Tafel ist wie folgt definiert:

- Sie besteht aus fünf Spalten und beliebig vielen (endlich vielen) Zeilen.
- Eine Zeile ist ein 5-Tupel der Form

$$k \quad \varphi \quad \psi \quad i \quad j$$

wobei $i, j, k \in \mathbb{N}$ sind, k ist die Zeilennummer, und φ ψ stellen die Regel $\varphi \rightarrow \psi$ dar, i ist die Nummer der nächsten Zeile, falls das Teilwort gefunden (die Regel also angewandt) wurde, und j ist die Nummer der nächsten Zeile, falls φ nicht auftrat.

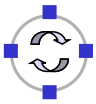


Ausführung einer Markov-Tafel

Die Ausführung der Markov-Tafel beginnt in der ersten Zeile (Nummer 0) und stoppt sobald zu einer nicht vorhandenen Zeilennummer *(i* oder *j*) gegangen werden soll.

Der Zustand bei der Ausführung einer Markov-Tafel ist eindeutig festgelegt durch

- die sich in Bearbeitung befindende Zeichenkette, und
- die aktuelle Zeilennummer.



Markov-Algorithmen als abstrakte Maschinen

$X \subseteq A^*$	Eingabemenge
$Y \subseteq A^*$	Ausgabemenge
$K \subseteq \{ (z, n) \mid z \in A^*, n \in \mathbb{N} \}$	Konfigurationen
$\boldsymbol{\alpha}(x) = (x, 0)$	Eingabefunktion
$\omega (z, n)$	Ausgabefunktion
$T : K \rightarrow K$	Transitionsfunktion
	$T (z, n) = (g[\varphi \rightarrow \psi](z), n')$, wobei $\varphi \rightarrow \psi$ die Regel in der Zeile n ist und n´ die Folgenummer (oben: i bzw. j)
$\sigma (z, n)$	$\sigma (z, n) = \begin{cases} \texttt{true}, & \text{falls n keine Zeilennummer} \\ \texttt{false}, & \text{sonst} \end{cases}$

Ein Markov-Algorithmus ist damit tatsächlich eine direkte Spezialisierung des Konzepts der abstrakten Maschine.



Markov-Algorithmus ‘Addition von Eins’

”Addiere | ”

$$A = \{ \mid \}; \quad X = A^*; \quad Y = A^+ = A^* - \{ \epsilon \}$$

Markov-Tafel:

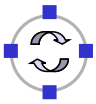
k	φ	ψ	i	j
0	ε	|	1	-

berechnet die Funktion $f(|^n) = |^{n+1}$, $n \in \mathbb{N}$

- Formuliert mit per „.“ markierter Terminierungsregel:

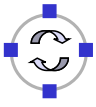
  $\varepsilon \rightarrow \mid .$

  (Nach Ausführung einer mit . markierten Regel, terminiert der Algorithmus.)



Das leere Wort ε

- Das leere Wort ε kommt in jedem Wort vor. Das erste Auftreten ist ganz am Anfang.
- Der Algorithmus ‘Addition von Eins’ schreibt also ein | *vor* das Eingabewort $|^n$ = | | . . . | .
- Der j -Eintrag der Tabelle kann niemals angelaufen werden und ist daher irrelevant. Dies deuten wir durch das Zeichen „-“ in der Tabelle an.



Addition zweier Zahlen in unärem Alphabet

$A_0 = \{ | \}$; $A = A_0 \cup \{ + \}$; $X = A^*_0 + A^*_0$ (= $\{ \mu + \nu \mid \mu, \nu \in A_0^* \}$); $Y = A_0^*$

Markov-Tafel:

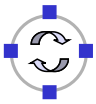
k	φ	ψ	i	j
0	+	ε	1	-

Der Algorithmus löscht das erste + im Eingabewort, also:

$$f(|^n + |^m) = |^{n+m}$$

- Formuliert mit per „.“ markierter Terminierungsregel:

  $+ \rightarrow \varepsilon$.



Verdopplung

$A_0 = \{ | \}$; $A = A_0 \cup \{ \# \}$; $X \stackrel{*}{=} Y = A_0$

Das Zeichen # spielt die Rolle einer Markierung (gelegentlich auch als „Schiffchen“ bezeichnet), die einmal von links nach rechts durchwandert und dabei die Zeichen | verdoppelt.

k	φ	ψ	i	j	Kommentar (hierbei gilt stets: $p = n - q$)
0	|	# |	1	3	$\| ^n \rightarrow \# \| ^n$
1	# |	| | #	1	2	$\| ^{2p} \# \| ^q \rightarrow \| ^{2(p+1)} \# \| ^{q-1}$ wiederholen bis $q = 1$
2	#	ε	3	-	$\| ^{2p} \# \rightarrow \| ^{2n}$ hier gilt q = 0

- Formuliert mit per „.“ markierter Terminierungsregel:

  # | $\rightarrow$ | | #

  # $\rightarrow \varepsilon$.

  | $\rightarrow$ # |

  (Man beachte, dass die dritte Regel nur zu Beginn einmal ausgeführt werden kann. Ebenso kann die zweite Regel nur am Ende ausgeführt werden.)

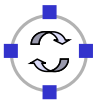


Verdopplung: Beispielausführung

Eine Berechnung mit dem Eingabewort | | | ergibt:

$$|||\underset{0}{\rightarrow}\#|||\underset{1}{\rightarrow}||\#||\underset{1}{\rightarrow}||||\#|\underset{1}{\rightarrow}|||||\#\underset{2}{\rightarrow}||||||$$

Allgemein wird die Funktion $f(|^n) = |^{2n}$ berechnet.



Multiplikation

$$A_0 = \{ | \} ; A = A_0 \cup \{ * , \# \} ; X = A_0^* * A_0^* ; Y = A_0^*$$

Der folgende Markov-Algorithmus berechnet die Funktion $f(|^n * |^m) = |^{n*m}$:

k	φ	ψ	i	j	Kommentar
0	*	* *	1	-	$\|^n * \|^m \rightarrow \|^n * * \|^m$
1	ε	*	2	-	$\|^n * * \|^m \rightarrow * \|^n * * \|^m$
2	* * |	# * *	3	6	
3	|#	# |	4	5	Faktor vorn
4	ε	|	3	-	kopieren
5	#	ε	2	-	
6	* |	*	6	7	1. Faktor löschen
7	* * *	ε	8	-	Hilfsmarkierung löschen



Multiplikation: Beispiel

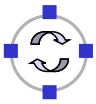
Mit der Eingabe | | | ∗ | | ergibt sich z. B. folgende Berechnungsfolge:

$$||| * || \underset{0}{\rightarrow} ||| * * || \underset{1}{\rightarrow} * ||| * * ||$$

$$\underset{2}{\rightarrow} * ||| \# * * | \underset{3,4}{\rightarrow} | * || \# | * | \underset{3,4}{\rightarrow} || * | \# || * * | \underset{3,4,5}{\rightarrow} ||| * ||| * * |$$

$$\underset{2}{\rightarrow} ||| * ||| \# * * \underset{3,4}{\rightarrow} |||| * || \# | * * \underset{3,4}{\rightarrow} ||||| * | \# || * * \underset{3,4,5}{\rightarrow} |||||| * ||| * *$$

$$\underset{(2)6}{\rightarrow} |||||| * || * * \underset{6}{\rightarrow} |||||| * | * * \underset{6}{\rightarrow} |||||| * * * \underset{7}{\rightarrow} ||||||$$



Kopieren

$$A_0 = \{ 0,1 \} ; A = A_0 \cup \{ * , \# \} ; X = A_0^*; Y = A_0^* * A_0^*$$

Der folgende Markov-Algorithmus berechnet die Funktion

$$f(\mu) = \mu * \mu, \mu \in A_0$$

k	φ	ψ	i	j	Kommentar
0	ε	$* \#$	1	-	
1	#0	0#	2	3	kopiere nächstes Zeichen 0 vor $*$
2	$*$	0 $*$	1	-	und wiederhole
3	#1	1#	4	5	kopiere nächstes Zeichen 1 vor $*$
4	$*$	1 $*$	1	-	und wiederhole
5	#	ε	6	-	



Kopieren: Beispiel

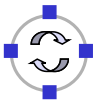
Mit der Eingabe 0 1 0 ergibt sich folgende Berechnung:

$$0\,1\,0 \underset{0}{\rightarrow} *\,\#\,0\,1\,0 \underset{1}{\rightarrow} *\;\;0\,\#\,1\,0 \underset{2}{\rightarrow} 0\,*\,0\,\#\,1\,0$$

$$\underset{(1)3}{\rightarrow} 0\;\;*\,0\,1\,\#\,0 \underset{4}{\rightarrow} 0\,1\;\;*\,0\,1\,\#\,0$$

$$\underset{1}{\rightarrow} 0\,1\;\;*\,0\,1\,0\,\# \underset{2}{\rightarrow} 0\,1\,0\;\;*\,0\,1\,0\,\#$$

$$\underset{(1,3)5}{\rightarrow} 0\,1\,0\;\;*\,0\,1\,0$$



Vor- und Nachteile von Markov-Algorithmen

- Markov-Algorithmen arbeiten auf einem sehr einfachen Niveau:
  - Nur reine Zeichenketten werden unterstützt
  - „Höhere“ Datentypen wie Zahlen werden nicht unterstützt, sondern müssen als Zeichenketten kodiert werden
  - Dadurch wird die Formulierung von Markov-Algorithmen aufwändig
  - Auch werden Markov-Tafeln für größere Alphabete schnell unhandlich, da in jedem logischen Schritt Fallunterscheidungen für alle Symbole notwendig werden können
- Andererseits kann der einzelne Bearbeitungsschritt leicht mit Standardoperationen des Datentyps `String` in gängigen Programmiersprachen umgesetzt werden:
  - Suchen des ersten Auftretens eines Teil-Strings und Ersetzen des Teil-Strings sind elementare String-Operationen
  - Markov-Interpreter können somit leicht realisiert werden



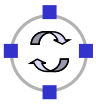
CHURCH'sche These

- Ausdrucksfähigkeit der verschiedenen Modelle
  - Leisten imperative Algorithmen mehr als Registermaschinen?

- Kann man Leistung von Algorithmenmodellen vergleichen?

> Die Klasse der intuitiv berechenbaren Funktionen stimmt mit den formalen Klassen der (Registermaschinen-, imperativ, applikativ, Markov-, etc.) berechenbaren Funktionen überein.

(Diese These ist prinzipiell nicht beweisbar, da sich allein schon der Begriff „intuitiv" nicht formal fassen lässt.)



Universelle Algorithmenmodelle

> Ein Algorithmenmodell heißt universell, wenn damit alle berechenbaren Funktionen beschrieben werden können.

Eigenschaften universeller Sprachen (u. a. alle Programmiersprachen)

- Der nutzbare Bereich für Daten / Parameterwerte ist nicht beschränkt (hierfür reicht der Datentyp `integer` ohne Begrenzung durch ein `maxint` aus).
- Konzepte wie Rekursion oder Iteration (**`while`**) mit bedingten Sprüngen erlauben eine (bedingte und potentiell unendliche) Wiederholung von Teilaufgaben

- Satz: *Die Algorithmenmodelle applikative, imperative, Markov- und Registermaschinen-Algorithmen sind universell.*
  (Beweise solcher Aussagen werden in Vorlesungen zur Theoretischen Informatik behandelt)



Zusammenfassung

- Formale Modelle
  - Registermaschine
  - Abstrakte Maschinen
  - Markov-Algorithmen
- Ausdrucksfähigkeit: Church'sche These
- Literatur: Saake/Sattler: *Algorithmen und Datenstrukture*n, Kapitel 6

