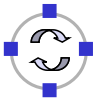
Programmierung und Algorithmen

Kapitel 8
Abstrakte Datentypen

(Dieses Kapitel wird ab der Prüfungsordnung 2021 nicht mehr behandelt, ist daher nicht prüfungsrelevant und wird nur für interessierte Studierende bereitgestellt.)



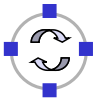
Überblick

Abstrakte Datentypen

Signaturen und Algebren

Spezifikation von ADTs

Umsetzung von ADTs

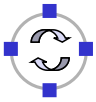


Einführung

- Motivation:
  Wiederverwendbarkeit und Strukturierung von Software
- Ziel:

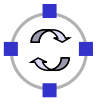
> Beschreibung von Datenstrukturen unabhängig von ihrer späteren Implementierung in einer konkreten Programmiersprache

- Abstrakter Datentyp (ADT)



Formen von Datentypen

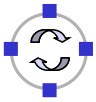
- *Konkrete Datentype*n:
  - Konstruiert aus Basisdatentypen bzw. Java-Klassen
- *Abstrakte Datentype*n:
  - Spezifikation der Schnittstelle nach außen
  - Operationen und ihre Funktionalität



Prinzipien von Abstrakten Datentypen

- ADT = Software-Modul
- **Kapselung**: darf nur über Schnittstelle benutzt werden
- **Geheimnisprinzip**: die interne Realisierung ist verborgen

. . . somit sind abstrakte Datentypen eine Grundlage des Prinzips der objektorientierten Programmierung!



Signatur

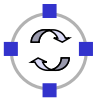
- Eine Signatur $\sum$ ist definiert als

$$\sum = (S, \Omega)$$

wobei Folgendes gilt:

- S ist eine Menge von Sorten.
- $\Omega = \{ f_{S^*, S} \}$ definiert die Funktionssymbole für Funktionen $f : s_1 \times \cdots \times s_n \rightarrow s$ mit Parametersorten s_1, ..., s_n und Ergebnissorte s.

- Funktionen ohne Parameter heißen *Konstanten*



Algebra zu einer Signatur

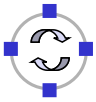
- Eine Algebra A_Σ zu einer Signatur Σ ist definiert als

$$A_\Sigma = (A_S , A_\Omega)$$

wobei Folgendes gilt:

  - A_S sind die Trägermengen der Sorten in S.
  - $A_\Omega = \{ A_f : A_{s1} \times \cdots \times A_{sn} \rightarrow A_s \}$ sind Funktionen auf diesen Trägermengen.

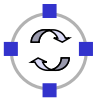
- Eine Algebra heißt partiell definiert, wenn mindestens eine der Funktionen eine partielle Funktion ist.



Algebraische Spezifikation

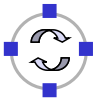
Gleichungsspezifikation

- Die Angabe der *Signatur* legt die Namen der Typen sowie die Funktionssignaturen fest.
- Gleichungen dienen als Axiome zur Einschränkung möglicher Algebren als Modelle.
- Zusätzlich erfolgt evtl. ein Import anderer Spezifikationen.



Algebraische Spezifikation: Beispiel

```
type Nat
operators
    0: → Nat
    suc: Nat → Nat
    add: Nat × Nat → Nat
axioms ∀i,j : Nat
    add (i, 0) = i
    add (i, suc (j)) = suc (add (i, j))
```

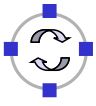


Spezifikationen und Modelle

- Algebra der Wahrheitswerte

```
type Bool
operators
    true: → Bool
    false: → Bool
```

- Modelle für diese Spezifikation?



Modelle für `Bool`

1. „Gewünschte“ Algebra:

   $A_{\texttt{Bool}} = \{ T, F \} ; A_{\texttt{true}} := T; A_{\texttt{false}} := F$

2. Wahrheitswerte über Zahlen realisiert:

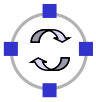
   $A_{\texttt{Bool}} = \mathbb{N} ; A_{\texttt{true}} := 1; A_{\texttt{false}} := 0$

   - Akzeptabel, aber die Trägermenge ist eigentlich zu groß

3. Algebra mit einem Element:

   $A_{\texttt{Bool}} = \{ 1 \} ; A_{\texttt{true}} := 1; A_{\texttt{false}} := 1$

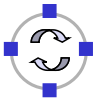
   - Diese Algebra ist sicherlich als Modell nicht erwünscht!



Standardmodelle

- Wie komme ich zu einem „kanonischen“ Standardmodell (also genau einer Algebra, die die Axiome respektiert) für eine gegebene Spezifikation?
  - Weder zu wenige noch zu viele Elemente
  - *„No confusion, no junk“*

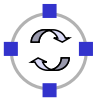
- Wir gehen dazu in zwei Schritten vor:
  - In einem ersten Schritt konstruieren wir eine Algebra, die keine unnützen, also keine nicht durch Funktionsberechnung konstruierbaren Werte enthält.
  - Im zweiten Schritt setzen wir dann die Werte gleich, die mittels der Gleichungen als gleich charakterisiert werden (und nicht mehr!).



Termalgebra

Die Termalgebra zu einer gegebenen Spezifikation ist definiert durch:

- Die Trägermenge, bestehend aus allen *korrekt gebildeten Termen* der Signatur.
- Der Funktionsanwendung als *Konstruktion des zugehörigen Terms*.



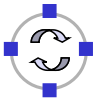
Beispiel Termalgebra für `Nat`

Vorüberlegung: A_{nat} induktiv definiert:

$0 \in A_{nat}$

$x, y \in A_{nat} \Rightarrow suc(x) \in A_{nat}$ und $add(x,y) \in A_{nat}$

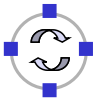
- $A_{nat} = \{0, suc(0), suc(suc(0)), add(0, suc(0)), \ldots\}$
- $A_0 = 0$
- $A_{suc}(x) = suc(x)$
- $A_{add}(x,y) = add(x,y)$



Quotiententermalgebra QTA

Die Quotiententermalgebra QTA ist wie folgt definiert:

- Die Trägermenge besteht aus den Äquivalenzklassen auf den Termen gemäß der durch die Axiome induzierten Gleichheit „=“.
- Die Operationen auf den Äquivalenzklassen nehmen jeweils (Repräsentanten der) Äquivalenzklassen und haben als Ergebnis die (Repräsentanten der) Äquivalenzklasse des Ergebnisterms über den Repräsentanten.

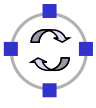


Beispiel QTA für `Nat`

Vorüberlegung: Äquivalenzklassen und ihre Repräsentanten

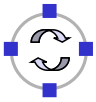
```
0 repräsentiert { 0, add(0,0),
      add(add(0,0),0), ... }
suc(0) repräsentiert { suc(0),
      add(0,suc(0)),
      add(add(0,suc(0)),0), ... }
suc(suc(0)) ...
```

- $A_{nat} = \{ 0, suc(0), suc(suc(0)), suc^3(0), suc^4(0), \ldots \}$
- $A_0 = 0$
- $A_{suc}(x) = suc(x)$
- $A_{add}(suc^n(0), suc^m(0)) = suc^{n+m}(0)$



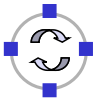
Initiale Semantik

- QTA als Muster für Standardsemantik
- Semantik eines ADT: Klasse aller Algebren die äquivalent zur QTA sind
- Äquivalenz basiert auf bijektiven Morphismen
- Initialität:
  - Prinzip der maximalen Ungleichheit
  - Zwei Werte sind nur dann gleich wenn dies aufgrund der Gleichungen bewiesen werden kann
- Symmetrisches Gegenstück ist Terminalität:
  - Prinzip der maximalen Gleichheit
  - Zwei Werte sind nur dann ungleich wenn dies bewiesen werden kann.
  - Erfordert Spezifikation von Ungleichheit!



Probleme mit initialer Semantik

```
type Set[Item]
operators
          create: → Set
    is_empty: Set → Bool
          insert: Set × Item → Set
          is_in: Set × Item → Bool
axioms ∀s : Set, ∀i : Item
          is_empty (create) = true
          is_empty (insert (s, i)) = false
          is_in (create, i) = false
          is_in (insert (s, i), j) =
                  if i=j then true else is_in (s, j)
```



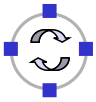
Probleme mit initialer Semantik II

- Mengensemantik:

```
insert(insert(s,i),j) = insert(insert(s,j),i)
insert(insert(s,i),i) = insert(s,i)
```

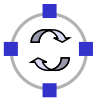
- Gilt auch in Beispielspezifikation:
  - Eine Menge kann man nur mit `is_empty` und `is_in` „beobachten“, und deren Gleichungen respektieren diese Regeln.

- Diese Regeln können aber nicht mit den Gleichungen bewiesen werden:
  - `insert(insert(s,i),i)` und `insert(s,i)` sind unterschiedliche Elemente in der QTA!



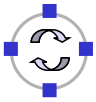
Spezifikation und Beispiele

- Konsequenzen aus der Theorie für Spezifikation
  - Oft initiale Semantik für Konstruktorfunktionen
  - Bei terminaler Semantik muss Ungleichheit auf importierten Datentypen erhalten bleiben
- Hier Theorie nur oberflächlich diskutiert
- Ab jetzt konkrete Spezifikationen!



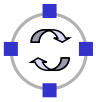
Spezifikation von Abstrakten Datentypen

1. **Type**: Name des neuen Typs zusammen mit eventuellen Parametern
2. **Functions**: *Signaturen* der auf dem ADT definierten Funktionen: für jede Funktion der Name, Typen und Reihenfolge der Parameter, Ausgabetyp sowie ggf. ob die Funktion total ($\rightarrow$) oder partiell ($\not\rightarrow$) ist
3. **Axioms**: beschreiben *Eigenschaften* der eingeführten Funktionen als prädikatenlogische Formeln (zumeist Gleichungen)
4. **Preconditions**: für jede partielle Funktion kann eine Vorbedingung angegeben werden, die angibt, wann sie definiert ist



Klassifikation der Funktionen

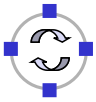
- *Konstruktorfunktionen*: Funktionen zum *Aufbauen* von Elementen des ADT
- *Selektorfunktionen*: die Inversen der Konstruktorfunktionen; zerlegen ein Element des Datentyps in seine „Einzelteile“
- *sonstige Funktionen*



Beispiel für Abstrakten Datentyp

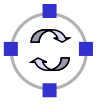
- ADT für natürliche Zahlen

```
type Nat
operators
    0: → Nat
    suc: Nat → Nat
    add: Nat × Nat → Nat
axioms ∀i,j : Nat
    add (i, 0) = i
    add (i, suc (j)) = suc (add (i, j))
```



Beispiel: Liste

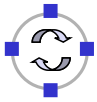
```
type List(T)
import Nat
operators
            [] : → List
            _ : _ : T × List → List
            head : List → T
            tail : List → List
            length : List → Nat
axioms ∀l : List, ∀x : T
            head (x : l) = x
            tail (x : l) = l
            length ([]) = 0
            length (x : l) = suc(length(l))
```



Liste: Erläuterungen

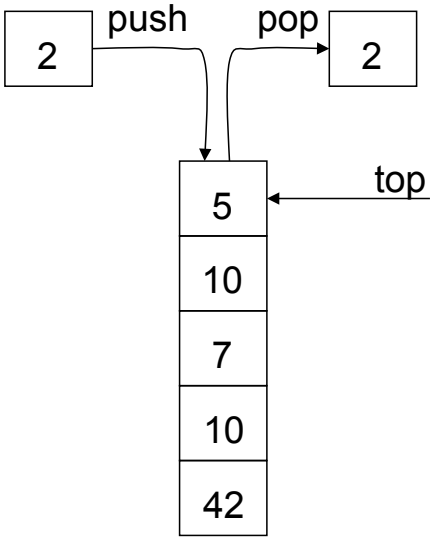
- _ : _ ist Notation für Infix-Operatoren (wie + in artithmetischen Ausdrücken)
- **`import`** importiert bereits definierten Datentypen
- mögliche Werte für Listen über Zahlen sind nun:

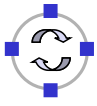
```
[]
1 : []
5 : ( 6 : ( 7 : [] ) )
1 : ( 1 : [] )
```



Kellerspeicher (Stack): Prinzip

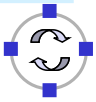
- LIFO-Prinzip: Last-In-First-Out-Speicher





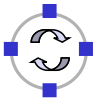
Stack: Definition des ADT

```
type Stack(T)
import Bool
operators
        empty : → Stack
        push : Stack × T → Stack
        pop : Stack → Stack
        top : Stack → T
        is_empty : Stack → Bool
axioms ∀s : Stack, ∀x : T
    pop (push (s, x)) = s
        top (push (s, x)) = x
        is_empty (empty) = true
        is_empty (push (s, x)) = false
```



Keller implementiert über Liste

```
empty == []
push(l,x) == x:l
pop(x:l) == l
top(x:l) == x
is_empty([]) == true
is_empty(x:l) == false
```



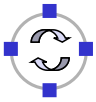
Beispiel für Keller-Nutzung

- Auswertung einfacher arithmetischer Ausdrücke
- analysierte Sprache:

```
A ::= B =
B ::= Int | (B+B) | (B*B)
```

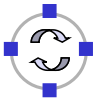
- Beispiel:

$$((3 + (4 * 5)) * (6 + 7)) =$$



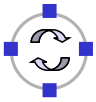
Bearbeitungsregeln

value(*t*)	= *eval* ⟨ *t* , *empty* ⟩	(1)
eval ⟨ (*t* , *S* ⟩	= *eval* ⟨ *t* , (*S* ⟩	(2)
eval ⟨ ∗ *t* , *S* ⟩	= *eval* ⟨ *t* , ∗ *S* ⟩	(3)
eval ⟨ +*t* , *S* ⟩	= *eval* ⟨ *t* , +*S* ⟩	(4)
eval ⟨)*t* , *y*∗*xS* ⟩	= *eval* ⟨)*t* , ⟦ *x* ∗ *y* ⟧ *S* ⟩	(5)
eval ⟨)*t* , *y*+*xS* ⟩	= *eval* ⟨)*t* , ⟦ *x* + *y* ⟧ *S* ⟩	(6)
eval ⟨)*t* , *x*(*S* ⟩	= *eval* ⟨ *t* , *xS* ⟩	(7)
eval ⟨ =, *x empty* ⟩	= *x*	(8)
eval ⟨ *xt* , *S* ⟩	= *eval* ⟨ *t* , ⟦ *x* ⟧ *S* ⟩	(9)



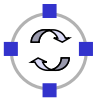
Auswertungsbeispiel (1)

bearbeiteter Term *t*	Stack	Regel
´((3+(4*5))*(6+7))=´	]	(2)
´(3+(4*5))*(6+7)) =´	( ]	(2)
´3+(4*5))*(6+7)) =´	(( ]	(9)
´+(4*5))*(6+7)) =´	3 (( ]	(4)
´(4*5))*(6+7)) =´	+3 (( ]	(2)
´4*5))*(6+7)) =´	(+3 (( ]	(9)
´*5))*(6+7)) =´	4(+3 (( ]	(3)
´5))*(6+7)) =´	*4(+3 (( ]	(9)
´))*(6+7)) =´	5*4(+3 (( ]	(5)
´))*(6+7)) =´	20 (+3 (( ]	(7)
´)*(6+7)) =´	20+3 (( ]	(6)



Auswertungsbeispiel (2)

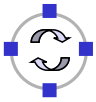
bearbeiteter Term *t*	Stack	Regel
´)*(6+7)) =´	20+3 (( ]	(6)
´)*(6+7)) =´	23(( ]	(7)
´*(6+7)) =´	23 ( ]	(3)
´(6+7)) =´	*23 ( ]	(2)
´6+7)) =´	(*23 ( ]	(9)
´+7)) =´	6 (*23 ( ]	(4)
´7)) =´	+6 (*23 ( ]	(9)
´)) =´	7+6 (*23 ( ]	(6)
´)) =´	13 (*23 ( ]	(7)
´) =´	13 *23 ( ]	(5)
´) =´	299 ( ]	(7)
´=´	299]	(8)



Komplexere Terme

```
A ::= B =
B ::= Int | B+B | B*B | (B)
```

- Arithmetische Ausdrücke ohne vollständige Klammerung
- Interpreter muss die unterschiedlichen Prioritäten der Operatoren berücksichtigen
- Lösungsansatz – zwei Stacks:
  - einen für die Operatoren,
  - den zweiten für die Operanden



Komplexere Terme: Regeln

$$value(t) = eval\ \langle\ t\ ,\ empty,\ empty\ \rangle \quad (10)$$

$$eval\ \langle\ (t\ ,\ S_1,\ S_2\ \rangle = eval\ \langle\ t\ ,\ (S_1,\ S_2\ \rangle \quad (11)$$

$$eval\ \langle\ *\ t\ ,\ S_1,\ S_2\ \rangle = eval\ \langle\ t\ ,\ *S_1,\ S_2 \quad (12)$$

$$eval\ \langle\ +t\ ,\ *S_1,\ yxS_2\ \rangle = eval\ \langle\ +t\ ,\ S_1,\ [\![\ x * y\ ]\!]\ S_2\ \rangle \quad (13)$$

$$eval\ \langle\ +t\ ,\ S_1,\ S_2\ \rangle = eval\ \langle\ t\ ,\ +S_1,\ S_2\ \rangle \quad (14)$$

$$eval\ \langle\ )t\ ,\ +S_1,\ yxS_2\ \rangle = eval\ \langle\ )t\ ,\ S_1,\ [\![\ x + y\ ]\!]\ S_2 \quad (15)$$

$$eval\ \langle\ )t\ ,\ *S_1,\ yxS_2\ \rangle = eval\ \langle\ )t\ ,\ S_1,\ [\![\ x * y\ ]\!]\ S_2\ \rangle \quad (16)$$

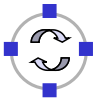
$$eval\ \langle\ )t\ ,\ (S_1,\ S_2\ \rangle = eval\ \langle\ t\ ,\ S_1,\ S_2\ \rangle \quad (17)$$

$$eval\ \langle\ =,\ +S_1,\ yxS_2\ \rangle = eval\ \langle\ =,\ S_1,\ [\![\ x + y\ ]\!]\ S_2\ \rangle \quad (18)$$

$$eval\ \langle\ =,\ *S_1,\ yxS_2\ \rangle = eval\ \langle\ =,\ S_1,\ [\![\ x * y\ ]\!]\ S_2\ \rangle \quad (19)$$

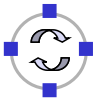
$$eval\ \langle\ =,\ empty,\ x\ empty\ \rangle = x \quad (20)$$

$$eval\ \langle\ xt\ ,\ S_1,\ S_2\ \rangle = eval\ \langle\ t\ ,\ S_1,\ [\![\ x\ ]\!]\ S_2\ \rangle \quad (21)$$



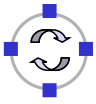
Komplexere Terme: Abarbeitung (1)

bearbeiteter Term t	Stack S_1	Stack S_2	Regel
´(4*5+3) * (6+7) =´	]	]	(11)
´ 4*5+3) * (6+7) =´	( ]	]	(21)
´ *5+3) * (6+7) =´	( ]	4]	(12)
´ 5+3) * (6+7) =´	* ( ]	4]	(21)
´ +3) * (6+7) =´	* ( ]	5 4]	(13)
´ +3) * (6+7) =´	( ]	20]	(14)
´ 3) * (6+7) =´	+ ( ]	20]	(21)
´) * (6+7) =´	+ ( ]	3 20]	(15)
´) * (6+7) =´	( ]	23]	(17)



Komplexere Terme: Abarbeitung (2)

bearbeiteter Term t	Stack S_1	Stack S_2	Regel
´) * (6+7) =´	( ]	23]	(17)
´ * (6+7) =´	]	23]	(12)
´ (6+7) =´	*]	23]	(11)
´ 6+7) =´	(*]	23]	(21)
´ +7) =´	(*]	6 23]	(14)
´ 7) =´	+ (*]	6 23]	(21)
´) =´	+ (*]	7 6 23]	(15)
´) =´	(*]	13 23]	(17)
´ =´	*]	13 23]	(19)
´ =´	]	299]	(20)

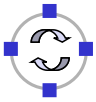


Nebenbemerkung zur Termauswertung

- Eine „einfache“ Erweiterung dieser Regelmenge um entsprechende Regeln für „-“ und „/“ führt nicht zum gewünschten Ergebnis.
- Der Grund hierfür ist, dass die Operationen „+“ und „*“ sowohl links- als auch rechtsassoziativ sind, die Operationen „-“ und „/“ jedoch (nur) linksassoziativ sind
  - Beispiel: 10 + 3 + 2 = (10 + 3) + 2 = 10 + (3 + 2)

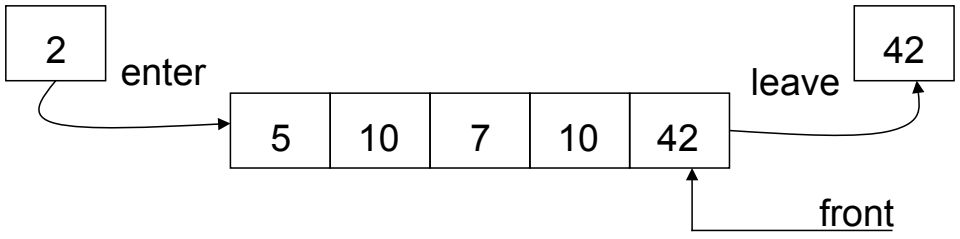
    Aber: 10 - 3 - 2 = (10 - 3) - 2 ≠ 10 - (3 – 2)
  - Die Regelmenge führt zu einer rechtsassoziativen Auswertung, ist also nur für „+“ und „*“ korrekt.
- Sollen auch linksassoziative Operationen unterstützt werden, so wird ein anderer Algorithmus benötigt – siehe hierzu auch:

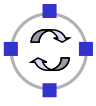
  `https://www.cis.upenn.edu/~matuszek/cit594-2002/Assignments/5-expressions.html`



Warteschlange (Queue)

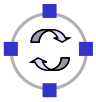
FIFO-Prinzip: „First in, first out.“





Warteschlange (Queue)

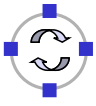
```
type Queue(T)
import Bool
operators
    empty : → Queue
    enter : Queue × T → Queue
    leave : Queue → Queue
    front : Queue → T
    is_empty : Queue → Bool
axioms ∀q : Queue, ∀x, y : T
           leave (enter (empty, x)) = empty
           leave (enter (enter(q, x), y)) =
                          enter (leave (enter(q, x)), y)
           front (enter (empty, x)) = x
           front (enter (enter(q, x), y)) =
                                front (enter (q, x))
           is_empty (empty) = true
           is_empty (enter(q, x)) = false
```



Entwurf von ADT

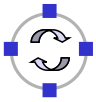
- Wie komme ich zu den Gleichungen?
- Wann habe ich genug Gleichungen?
- Wann fehlt mir ein Axiom?

→ leider keine einfache Antworten zu erwarten



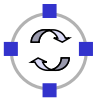
Systematische Vorgehensweise

1. Festlegung der Konstruktoren
   - Bei Stack: `empty` und `push`
2. Eventuell: Axiome zur Gleichsetzung von Konstruktortermen
   - Siehe Beispiel „Set“: mehrfaches Einfügen und Reihenfolge der Einfügeoperationen ist unerheblich
3. Definition geeigneter Selektoren
   - Selektoren erlauben den lesenden Zugriff auf konstruierte Werte und liefern meist importierte Datentypen zurück
   - Die Auswertung von Selektoren kann auf ausschließlich mit Konstruktoren konstruierten Termen erfolgen
   - Bei Stack: `is_empty, top`
4. Weitere Operationen („Manipulatoren“) festlegen
   - Bei Stack: `pop`
5. Fehlersituationen abfangen



Festlegung weiterer Operationen

- Wenn möglich: direkt auf Konstruktoren und Selektoren zurückführen
- Regeln von links nach rechts als Ersetzungsregeln aufbauen
  - Rechte Seite ‘einfacher’ als linke Seite
  - Bei Rekursion:
    - Argumente ‘einfacher’ (echt monoton schrumpfend)
    - Abbruch garantiert? (Vorsicht! — wird oft vergessen)
  - Oft: Vorgehen analog zu applikativen Algorithmen
- Vollständige Fallunterscheidung:
  - Jeder Konstruktor muss bei den Parametern berücksichtigt werden

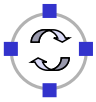


Umsetzung von ADTs

- ADT in Programmiersprachen
  - Konzept der Kapselung
  - Verbergen der internen Repräsentation
  - Gleiche Verwendung trotz unterschiedlicher Implementierung
  - Vorteile: Stabilität gegenüber Änderungen, Auswahl einer geeigneten Implementierungsvariante

- ADT in Java (objektorientiert!)
  - Typen → Klassen
  - Funktionen → Methoden
  - Klassen als konkrete Implementierung

  Das nächste Kapitel führt daher in die objektorientierte Programmierung mit Java ein.



Zusammenfassung

- Abstrakte Datentypen
- Kapselung & Geheimnisprinzip
- Implementierungsunabhängige Definition
- Literatur: Saake/Sattler: *Algorithmen und Datenstrukture*n, Kapitel 11-12

