

TU Ilmenau	Physikalisches Grundpraktikum	Versuch O1
Institut für Physik	<b>Brennweite und Hauptebenen eines Linsensystems</b>	Seite 1

## 1. Aufgabenstellung

- 1.1.** Die Brennweite und die Lagen der Hauptebenen eines Linsensystems sind nach der Methode von Abbe zu bestimmen, die gefundenen Ergebnisse in einer maßstabsgerechten Skizze darzustellen.
- 1.2.** Die Brennweite einer dünnen Zerstreuungslinse ist durch Kombination mit einer dünnen Sammellinse nach der Bessel-Methode zu bestimmen.

Literatur:	Schenk, W.	Physikalisches Praktikum
	Kremer, F. (Hrsg.)	Vieweg + Teubner Verlag   Springer Fachmedien Wiesbaden GmbH 13. Auflage 2011, S. 240-247
	Walcher, W.	Praktikum der Physik B. G. Teubner Stuttgart Leipzig Wiesbaden 8. Auflage 2004, S. 140-156
	Eichler, H. J.	Das Neue Physikalisches Grundpraktikum
	Kronfeldt, H.-D.	Springer Berlin, Heidelberg, New York
	Sahm, J.	2. Auflage 2006, S. 347-357

## 2. Grundlagen

Linsen sind rotationssymmetrische, durchsichtige Körper mit einer Brechzahl verschieden von der der Umgebung und im einfachsten Falle von sphärischen und ebenen Flächen begrenzt. Sie können von einem Punkt des Gegenstandes ausgehende Lichtstrahlen in einem Punkt des Bildraumes wieder vereinigen (optische Abbildung, reell oder virtuell).

Charakteristische Kenngröße ist die Brennweite  $f$  bzw.  $f'$ . Sie bestimmt den Abstand der Brennpunkte  $F$  und  $F'$  von den zugehörigen Hauptpunkten  $H$  bzw.  $H'$ . Die Brennpunkte sind als Vereinigungspunkte parallel zur Linsenachse verlaufender Lichtstrahlen definiert. Als dünn bezeichnet man Linsen, deren Brennweite groß gegen die Linsendicke ist. Beide lichtbrechenden Grenzflächen denkt man sich jetzt als eine einzige Ebene, die auch die Hauptpunkte enthält. Für sie gilt die Abbildungsgleichung

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{g} + \frac{1}{b} \quad (1)$$

mit  $g$  - Gegenstandsweite und  $b$  - Bildweite.

Stellt man zwei dünne Linsen in geringem Abstand voneinander auf, dann addieren sich die Kehrwerte ihrer Brennweiten  $f_1$  und  $f_2$  zum Kehrwert der Gesamtbrennweite:

$$\frac{1}{f_{ges}} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} \quad (2)$$

Den Kehrwert der Brennweite nennt man deshalb auch Brechkraft  $D$  (Einheit Dioptrie, dpt).

### 2.1. Abbe-Methode

Im Falle von dicken Linsen oder Linsensystemen erfolgt die Bildkonstruktion mit Hilfe von Hauptebenen (Abb. 1). Die Hauptebenen mit den zugehörigen Brennweiten werden in diesem Falle so festge-

TU Ilmenau	Physikalisches Grundpraktikum	Versuch O1
Institut für Physik	<b>Brennweite und Hauptebenen eines Linsensystems</b>	Seite 2

legt, dass die einfachen Regeln der Bildkonstruktion für die geometrische Optik erhalten bleiben, wenn man vereinbart, dass alle Strahlen zwischen den Hauptebenen parallel zur optischen Achse verlaufen.

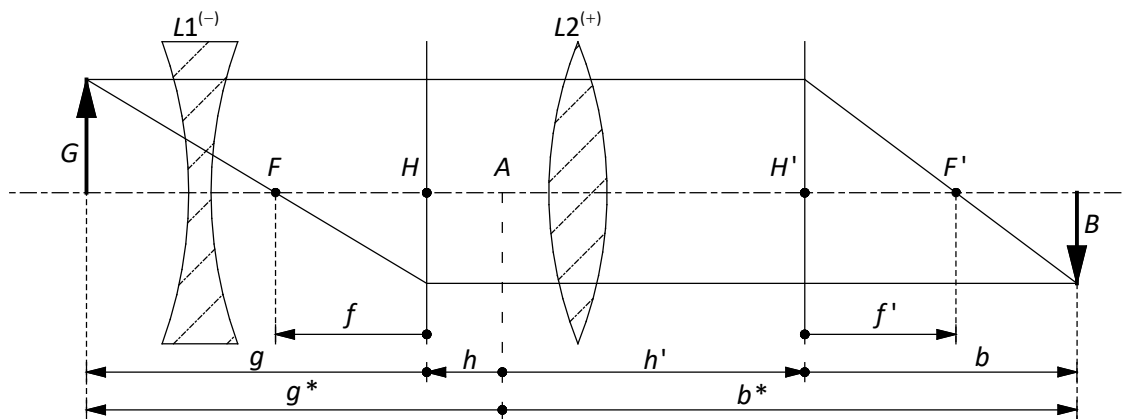


Abb. 1: Strahlengang für ein Linsensystem bei Verwendung von Hauptebenen ( $H$  - gegenstandsseitiger Hauptpunkt mit zugehöriger Hauptebene,  $F$  - gegenstandsseitiger Brennpunkt,  $H'$  - bildseitiger Hauptpunkt mit zugehöriger Hauptebene,  $F'$  - bildseitiger Brennpunkt)

Da für das in Aufgabe 1.1 verwendete System die Lage der Hauptpunkte  $H$  und  $H'$  nicht bekannt ist, können  $g$  und  $b$  bei einer optischen Abbildung nicht direkt gemessen werden. Man bestimmt zunächst die Entfernungen  $g^*$  und  $b^*$  von einer beliebigen, am Linsensystem angebrachten Ablesemarke  $A$ . Mit dem Abbildungsmaßstab

$$\gamma = \frac{B}{G} = \frac{b}{g} \quad (3)$$

( $B$  - Bildgröße und  $G$  - Gegenstandsgröße) sowie (1) erhält man Gleichungen zur Bestimmung der Systembrennweite und der Lage der Hauptebenen:

$$g^* = g + h = f \left( 1 + \frac{1}{\gamma} \right) + h \quad (4)$$

$$b^* = b + h' = f' (1 + \gamma) + h'$$

Man beachte die Vorzeichenfestlegungen aller angegebenen Strecken!

## 2.2. Bessel-Methode

Die zu untersuchende Zerstreuungslinse kann kein reelles Bild von einem Gegenstand erzeugen. Sie wird deshalb mit einer Sammellinse geeigneter Brennweite so kombiniert, dass sich nach Gl. (2) eine positive Gesamtbrennweite ergibt. Für Sammellinse und resultierendes Linsensystem seien die Dicken klein gegen die Brennweiten, so dass die Näherungen für dünne Linsen anwendbar sind.

Stellt man das Linsensystem oder die Sammellinse zwischen einen leuchtenden Gegenstand  $G$  und einen im Abstand  $s$  aufgestellten Schirm  $S$ , dann gibt es für  $s > 4f$  wegen der Umkehrbarkeit der Lichtwege zwei symmetrische Linsenstellungen  $I$  und  $II$ , bei denen eine reelle Abbildung des Gegen-

TU Ilmenau	Physikalisches Grundpraktikum	Versuch O1
Institut für Physik	<b>Brennweite und Hauptebenen eines Linsensystems</b>	Seite 3

standes auf dem Schirm erzielt wird (Abb. 2). Hierbei können die Strecken  $s$  und  $e$  mit hoher Genauigkeit gemessen werden, was für die Gegenstandsweite  $g$  und die Bildweite  $b$  nicht zutrifft.

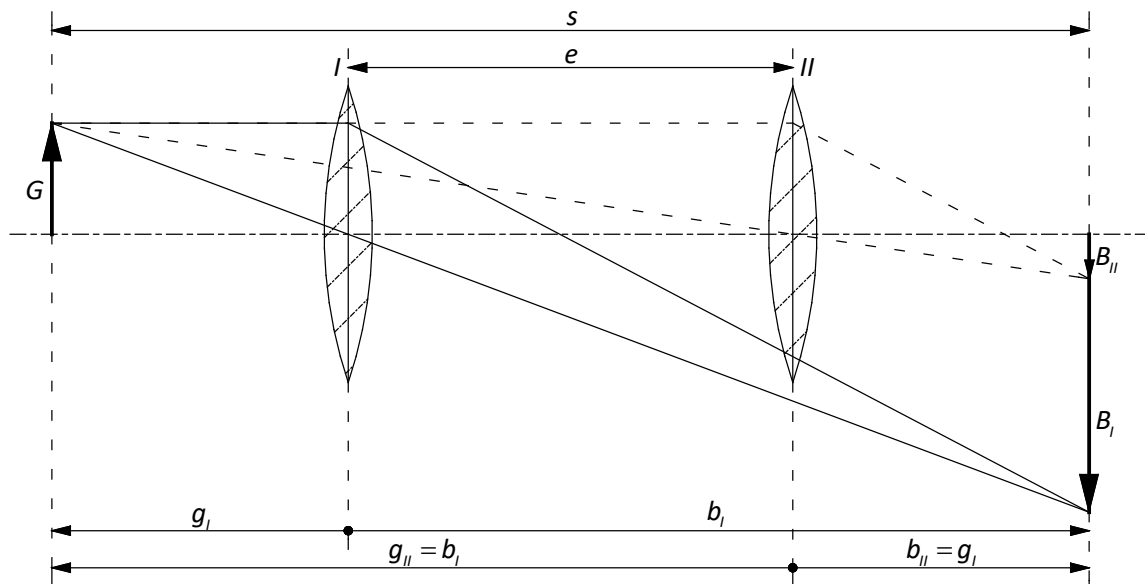


Abb. 2: Linsenstellungen I und II zur Bestimmung der Brennweite mit der Bessel-Methode

Mit  $e = |b - g|$ ,  $s = b + g$  sowie der Abbildungsgleichung (1) erhält man

$$f = \frac{s^2 - e^2}{4s}. \quad (5)$$

Bestimmt man auf diese Weise zunächst die Brennweite des Systems aus Sammellinse und Zerstreuungslinse  $f_{ges}$  und danach die der Sammellinse  $f_s$ , dann ist die Brennweite der Zerstreuungslinse  $f_z$  nach Gl. (2) leicht berechenbar.

### 3. Messanleitung und Auswertung

#### 3.1. Abbe-Methode

Auf einer optischen Bank (Dreieckschiene mit aufgeklebtem Lineal) stecken die optischen Elemente in verschiebbaren Reitern mit Markierungen zum Ablesen der Position. Vor den Kondensator der Lichtwurf Lampe wird für den ersten Versuchsteil ein Halter mit eingebautem Glasmaßstab gestellt. Die Oberfläche mit dem gravierten Maßstab ist so im Halter platziert, dass sie sich, in Lichtrichtung gesehen, an derselben Position wie die Ablesemarke des Reiters befindet. Das zu vermessende Linsensystem (Fotoobjektiv) stellt man mit der großen Öffnung Richtung Auffangschirm in der Nähe der Lampe auf und justiert seine Höhe nach der optischen Achse (Lampe/Glasmaßstab). Der Entfernungsring ist auf die Stellung  $\infty$  zu drehen und darf während der Messung nicht mehr verstellt werden.

Der Schirm mit Millimeterteilung wird zunächst an das Ende der Schiene (1600 mm) gestellt und seine korrekte Ausrichtung senkrecht zur optischen Achse kontrolliert. Durch Verschieben des Linsensystems stellt man ein scharfes Bild ein, das nunmehr vergrößert ist und die Bestimmung des Abbildungsmaßstabs erlaubt. Im weiteren Verlauf des Versuches schiebt man den Schirm in mindestens 10 verschie-

TU Ilmenau	Physikalisches Grundpraktikum	Versuch O1
Institut für Physik	<b>Brennweite und Hauptebenen eines Linsensystems</b>	Seite 4

dene Positionen, korrigiert die optische Abbildung und notiert in einer Messwerttabelle die Größen  $G$ ,  $B$ , die Stellung der Ablesemarke des Linsensystems auf der Schiene sowie die Abstände  $g^*$  und  $b^*$  zwischen den Ablesemarken an den entsprechenden Reiterfüßen.

Position des Schirms auf der optischen Bank: (1600 ... 1000) mm in Schritten von 50 mm

Achten Sie auf sorgfältiges Ablesen der Objektivposition, da diese sich anfangs nur sehr wenig ändert, halbe Millimeter können noch geschätzt werden! Der Blendenring sollte auf die größte Lichtstärke (3,5) eingestellt sein. Zur Erleichterung der Scharfstellung kann eine Einstellhilfe (Keilsystem mit Schlitz) in den Strahlengang gebracht werden, dessen Bild bei richtiger Position des Objektivs einen durchgängigen Strich ergibt.

Aus den gemessenen Werten  $G$  und  $B$  werden nach Gl. (3) jeweils  $\gamma$  und  $1/\gamma$  berechnet und mit in die Tabelle eingetragen. Für die Gegenstands- und die Bildseite findet man die gesuchten Größen Brennweite und Hauptebenenabstand von der Ablesemarke gemäß Gl. (4) leicht mit Hilfe von Ausgleichsgeraden. Hierzu trägt man  $g^*$  über  $1+1/\gamma$  und in einem weiteren Diagramm  $b^*$  über  $1+\gamma$  auf. Der Regressionskoeffizient (Anstieg) liefert die Brennweite und das Absolutglied den gesuchten Hauptebenenabstand. Das Praktikumsprogramm *PhysPract* berechnet darüber hinaus für diese Ergebnisse noch die zugehörigen Unsicherheiten (Standardabweichungen).

Die ermittelten Lagen der Hauptebenen und die zugehörigen Brennpunkte sind relativ zur Position der Ablesemarke in einer maßstabgetreuen Skizze darzustellen. Das Linsensystem (Objektivumriss) ist durch einen rechteckigen Rahmen mit darzustellen.

### 3.2. Bessel-Methode

Bei der Bessel-Methode wird als leuchtender Gegenstand eine kreuzförmige Doppelblende benutzt. Sammellinse und Zerstreuungslinse sind dicht hintereinander in einer Halterung mit Schieber eingebaut.

Für die Sammellinse allein und für das System Sammellinse plus Zerstreuungslinse sind die Entfernungen  $e$  für 10 verschiedene Abstände  $s$  zwischen Blende und Schirm zu bestimmen. Hierzu sucht man zunächst durch sukzessive Verkleinerung von  $s$  den kürzest möglichen Abstand ( $>\approx 4f$ ), der noch zwei unterschiedlich große Abbildungen erlaubt. Im weiteren Verlauf des Versuches wird dann  $s$  weiter erhöht und  $e$  dazu bestimmt. Eine am Halter angebrachte Irisblende sollte zur Verbesserung der Bildqualität auf einen Durchmesser von etwa (10 ... 15) mm verkleinert werden.

Schrittweite von  $s$  für die Sammellinse:  $\Delta s = 10 \text{ mm}$

Schrittweite von  $s$  für das Linsensystem:  $\Delta s = 20 \text{ mm}$

Aus den gemessenen Wertepaaren  $s$  und  $e$  sind nach Gl. (5) die entsprechenden Brennweiten zu berechnen. Die Mittelwerte der Brennweiten der Sammellinse  $f_s$  und des Gesamtsystems  $f_{ges}$  sind mit abgeschätzten Unsicherheiten (Standardabweichungen) anzugeben. Aus beiden Werten ist nach Gl. (2) die Brennweite  $f_z$  der Zerstreuungslinse zu berechnen. Für dieses Ergebnis ist die kombinierte Unsicherheit anzugeben.

TU Ilmenau	Physikalisches Grundpraktikum	Versuch O1
Institut für Physik	<b>Brennweite und Hauptebenen eines Linsensystems</b>	Seite 5

#### 4. Ergänzungsexperimente zur Bessel-Methode (Studierende der Technischen Physik)

##### 4.1. Aufgabenstellung

Die Annahme dünner Linsen für die Messaufgabe 1.2 ist zu überprüfen. Dazu werden die Versuchsergebnisse für die Sammellinse und das System Sammellinse /Zerstreuungslinse nochmals unter Einbeziehung eines nicht verschwindenden Hauptebenenabstands  $d$  ausgewertet, zu dessen Ermittlung ein Autokollimations-Verfahren anzuwenden ist.

##### 4.2. Grundlagen

Wenn der Hauptebenenabstand der nach der Bessel-Methode zu untersuchenden Linse (dick, steht fortan auch für das Linsensystem) nicht mehr vernachlässigbar ist, dann führt die Auswertung nach Gl. (5) zu systematischen Abweichungen des Versuchsergebnisses. Die folgende, gegenüber Abb. 2 modifizierte Skizze verdeutlicht die Verhältnisse:

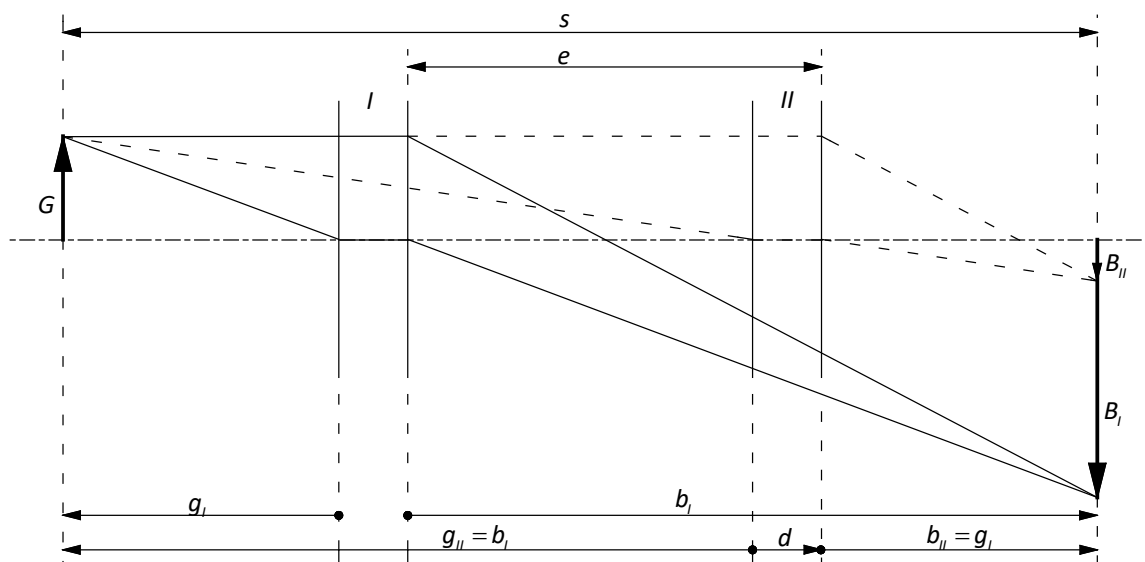


Abb. 3: Bessel-Methode mit Berücksichtigung eines Hauptebenenabstands  $d$

Man sieht sofort, dass die Messgröße  $e$  genauso bestimmt wird wie bei dünnen Linsen, der gemessene Abstand  $s$  zwischen Gegenstand und Auffangschirm jedoch um den Hauptebenenabstand  $d$  zu korrigieren ist. Damit erhält man für die Brennweite:

$$f = \frac{(s-d)^2 - e^2}{4(s-d)}. \quad (6)$$

Da  $d$  noch unbekannt ist, muss ein weiteres Messverfahren eingesetzt werden. Der vorliegende Versuchsaufbau ermöglicht die Bestimmung des Hauptebenenabstands durch Autokollimation. Darunter versteht man ein optisches System, bei dem sich der Gegenstand und seine Abbildung in ein und derselben Ebene befinden. Möglich wird dies durch einen Planspiegel, der kurz hinter der Linse aufgestellt wird (Abb. 4).

TU Ilmenau	Physikalisches Grundpraktikum	Versuch O1
Institut für Physik	<b>Brennweite und Hauptebenen eines Linsensystems</b>	Seite 6

Befindet sich der Gegenstand in der Brennebene vor der Linse, dann erfolgt eine Abbildung ins Unendliche, nach Reflexion am Spiegel erscheint das Bild in der Gegenstandsebene wieder scharf. Notiert wird zunächst der Abstand  $a_1$  zwischen einer am Linsenhalter angebrachten Ablesemarke A und dem Gegenstand. Nach Drehung der Linse um  $180^\circ$  und Wiederholung des Verfahrens befinden sich die jetzt vertauschten Hauptebenen an derselben Stelle, nur die (angedeutete) Position der Ablesemarke hat sich geändert. Man sieht an der nebenstehenden Skizze, dass die Summe der beiden Strecken  $a_1$  und  $a_2$  genau dem Abstand  $a_f$  zwischen den Brennpunkten der Linse entspricht:

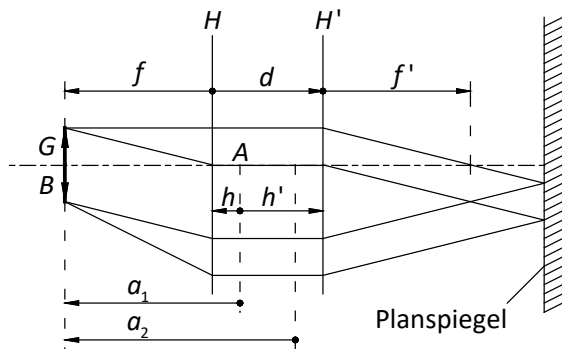


Abb. 4: Autokollimations-Verfahren

und  $a_2$  genau dem Abstand  $a_f$  zwischen den Brennpunkten der Linse entspricht:

$$a_1 + a_2 = f + h + f' + h' = 2f + d = a_f. \quad (7)$$

Eingesetzt in Gl. (6) erhält man

$$4f(s - a_f + 2f) = (s - a_f + 2f)^2 - e^2 \quad (8)$$

und daraus

$$f = \frac{1}{2} \sqrt{(s - a_f)^2 - e^2} \text{ sowie} \quad (9)$$

$$d = a_f - 2f. \quad (10)$$

### 4.3. Messanleitung und Auswertung

Als Gegenstand für den Autokollimations-Versuch wird die Kreuzblende gegen ein halb abgedecktes Diarähmchen mit einem Streifenmuster ausgetauscht. Der Planspiegel lässt sich unter Zuhilfenahme des auf den Gegenstand zurückreflektierten Lichtes senkrecht zur optischen Achse einstellen.

**Achtung: Die Spiegelfläche bitte nicht mit den Fingern berühren, sie kann nur schlecht bzw. gar nicht wieder gereinigt werden!**

Nun stellt man die Linse nah am Spiegel auf, justiert ihre Höhe und verschiebt beide Reiter gemeinsam, bis das Bild des Gegenstandes auf der abgedeckten Hälfte des Diarähmchens scharf erscheint. Der so gewonnene Abstand  $a_1$  wird notiert. Die Messung wird danach mit der um  $180^\circ$  verdrehten Linse zur Bestimmung von  $a_2$  durchgeführt und beide Prozeduren mehrfach wiederholt.

Die genaue Position des Planspiegels ist für das Autokollimations-Verfahren unkritisch, dieser sollte aber nicht zu weit von der Linse entfernt stehen, weil ansonsten das entworfen Bild zu sehr abgeblendet wird. Achten Sie darauf, dass eine der Autokollimation ähnliche Abbildung möglich ist, wenn die Zerstreuungslinse mit ihrer konkaven Oberfläche zum Gegenstand zeigt. Sie benötigt den Planspiegel nicht und kann somit leicht erkannt werden.

Die im Durchführungsteil 3.2 gewonnenen Daten für die Sammellinse und ihre Kombination mit der Zerstreuungslinse werden mittels Gl. (9) nochmals ausgewertet, wobei für den Fokusabstand  $a_f$  der

TU Ilmenau	Physikalisches Grundpraktikum	Versuch O1
Institut für Physik	<b>Brennweite und Hauptebenen eines Linsensystems</b>	Seite 7

Mittelwert aller Summen  $a_1 + a_2$  zu verwenden ist. Zur Überprüfung der Ergebnisse wird jeweils eine grafische Darstellung empfohlen. Gl. (9) kann auch so aufgeschrieben werden:

$$e^2 = (s - a_f)^2 - 4f^2. \quad (11)$$

Trägt man also in einem Diagramm  $e^2$  über  $(s - a_f)^2$  auf, dann sollte eine berechnete Ausgleichsgerade den Anstieg Eins haben und die Beträge von Absolutglied oder der Nullstelle dem Wert  $4f^2$  entsprechen. Ein genau für diese Versuchsauswertung zugeschnittenes Bearbeitungsfenster ist im Praktikumsprogramm *PhysPract* integriert.

## 5. Anhang

Als Beispiel zur Konstruktion von Hauptebenen sei folgendes Linsensystem, bestehend aus einer Zerstreuungslinse- und einer Sammellinse, gegeben:

- Linse  $L1$ :  $f_1 = -40\text{mm}$
- Linse  $L2$ :  $f_2 = +35\text{mm}$
- Abstand der Mittelebenen der beiden dünnen Linsen:  $d_l = 20\text{mm}$

Die Konstruktion der bildseitigen Hauptebene  $H'$  einschließlich zugehörigen Brennpunktes  $F'$  verdeutlicht nachfolgende Abbildung.

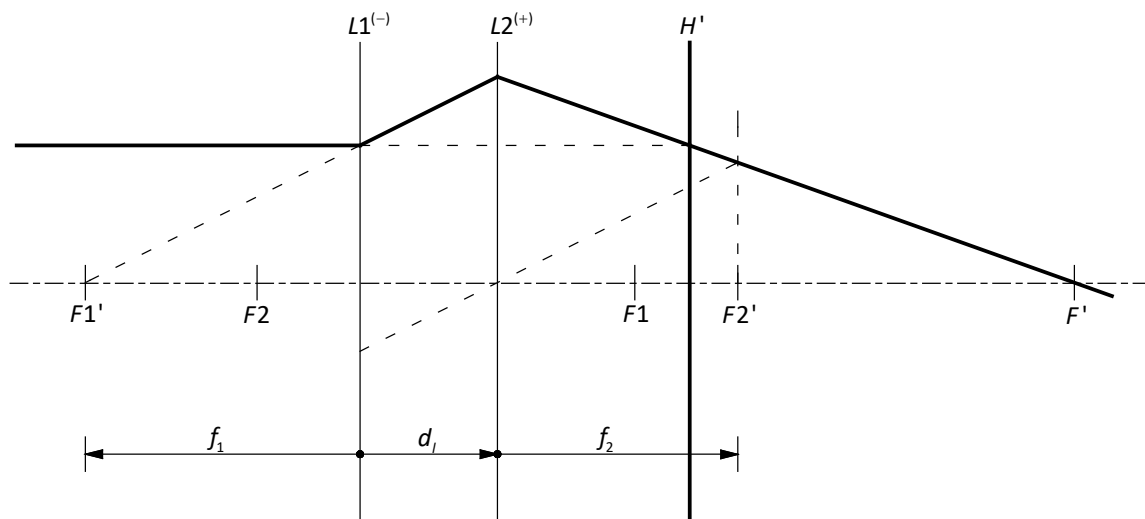


Abb. 5: Konstruktion der bildseitigen Hauptebene  $H'$  und des zugehörigen Brennpunktes  $F'$

Ein Parallelstrahl trifft von der Gegenstandsseite auf Linse  $L1$ , er wird zum Brennpunktstrahl von  $F1'$  (Zerstreuungslinse) und fällt auf Linse  $L2$ . Sein weiterer Verlauf lässt sich finden, wenn man bedenkt, dass ein Parallelstrahlenbündel in der Brennebene einer Linse vereinigt wird. Ein parallel zum Strahlenverlauf zwischen den Linsen gezeichneter Mittelpunktstrahl durch Linse  $L2$  markiert somit in der Brennebene durch  $F2'$  den Punkt, durch den auch der gesuchte Strahl verlaufen muss. Damit hat man den Verlauf eines Parallelstrahls nach Passieren des Linsensystems gefunden. Der Schnittpunkt zwischen ursprünglicher Parallelstrahlrichtung und auslaufendem Strahl markiert dann die bildseitige

TU Ilmenau	Physikalisches Grundpraktikum	Versuch O1
Institut für Physik	<b>Brennweite und Hauptebenen eines Linsensystems</b>	Seite 8

Hauptebene  $H'$ , der Schnittpunkt zwischen auslaufendem Strahl und optischer Achse den zugehörigen Brennpunkt  $F'$ .

Analog dazu lässt man zur Konstruktion der gegenstandsseitigen Hauptebene  $H$  und des gegenstandsseitigen Brennpunkts  $F$  einen Parallelstrahl von der Bildseite her einfallen und verfolgt dessen Verlauf durch das Linsensystem (Abb. 6). An der Sammellinse  $L2$  wird der parallel zur optischen Achse einfallende Strahl zum Brennpunktstrahl durch  $F2$ , trifft jedoch vorher auf die Linse  $L1$  und wird von der optischen Achse weggebrochen. Den tatsächlichen Verlauf nach dieser Brechung findet man analog zur Konstruktion in Abb. 5, wenn man einen Mittelpunktstrahl durch  $L1$  parallel zum Strahlenverlauf des gesuchten Strahls zwischen den beiden Linsen konstruiert. Diese beiden Strahlen eines Parallelstrahlenbündels müssen links von  $L1$  so verlaufen, als kämen sie aus einem gemeinsamen Ursprung in der gegenstandsseitigen Brennebene von  $L1$ . Man findet diesen Punkt als Schnittpunkt zwischen Mittelpunktstrahl und Brennebene und kann nun den Verlauf des gesuchten Strahls links von  $L1$  konstruieren. Der Schnittpunkt zwischen den Extrapolationen des einfallenden Parallelstrahls und des ausfallenden Strahls ergibt die gegenstandsseitige Hauptebene  $H$ , der Schnittpunkt zwischen ausfallendem Strahl und optischer Achse den gegenstandsseitigen Brennpunkt  $F$ .

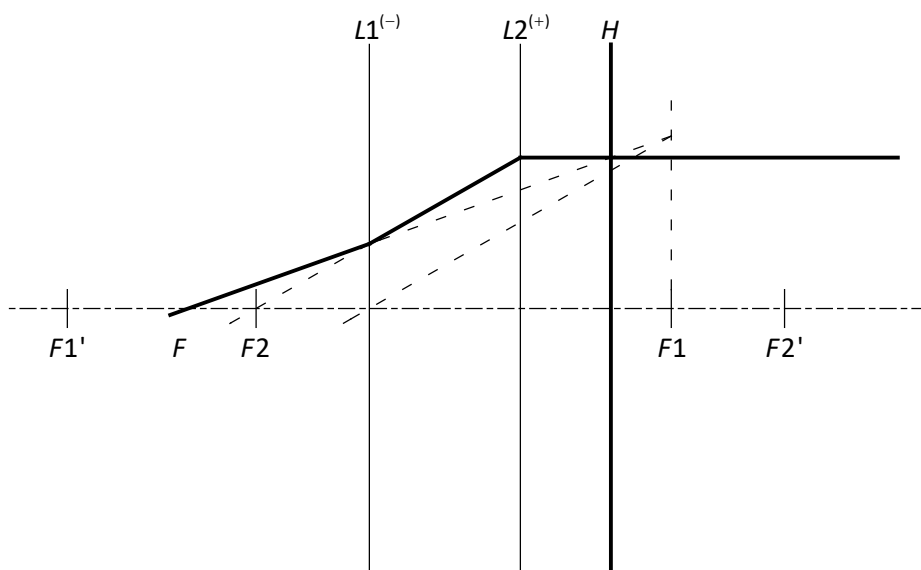


Abb. 6: Konstruktion der gegenstandsseitigen Hauptebene  $H$  und des zugehörigen Brennpunktes  $F$

Wie man sieht, sind die zu beiden Hauptebenen gehörenden Brennweiten gleich, die Hauptebenen liegen im gezeichneten Beispiel nicht innerhalb des Linsensystems. Zur Überprüfung ist in den Abbildungen 7 und 8 die Bildentstehung mit Hilfe der gefundenen Hauptebenen und unter Beachtung der Brechung an beiden Linsen gezeichnet (Maßstab 1:2 verkleinert). Die Verfahren führen trotz völlig unterschiedlicher Strahlengänge zum gleichen Ergebnis, die Vereinfachung infolge der Verwendung von Hauptebenen in Abb. 7 ist offensichtlich.



TU Ilmenau	Physikalisches Grundpraktikum	Versuch O1
Institut für Physik	<b>Brennweite und Hauptebenen eines Linsensystems</b>	Seite 9

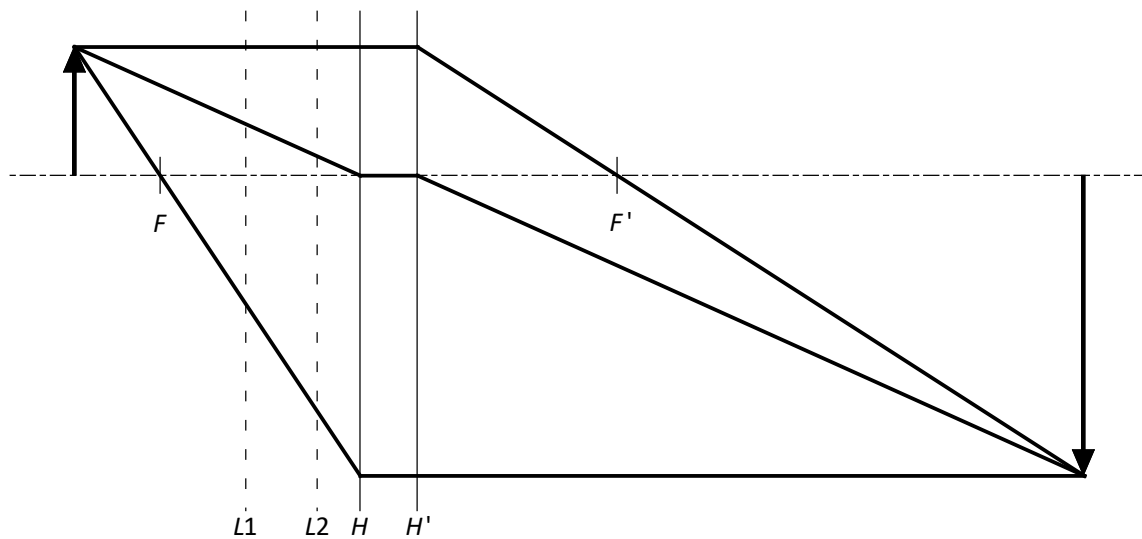


Abb. 7: Bildkonstruktion bei Verwendung der gefundenen Hauptebenen und Brennpunkte

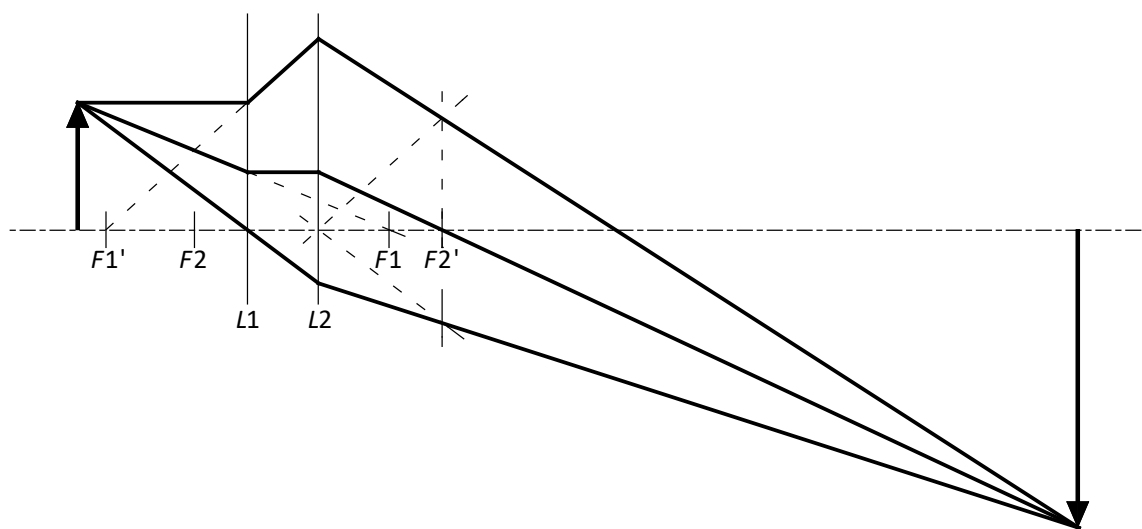


Abb. 8: Bildkonstruktion bei Beachtung der vorgegebenen Linsen