

TU Ilmenau	Physikalisches Grundpraktikum	Versuch O6
Institut für Physik	Optische Aktivität	Seite 1

1. Aufgabenstellung

- 1.1. Das Drehvermögen von Glucose in wässriger Lösung ist zu bestimmen und daraus die Konzentrationen dreier Glucoselösungen zu ermitteln.
- 1.2. Die Verdet-Konstante von schwerem Flintglas (SF-58) ist für vier verschiedene Lichtwellenlängen zu bestimmen.

2. Grundlagen

Licht breitet sich als elektromagnetische Welle aus. Aus den *Maxwellschen Gleichungen* lassen sich beispielsweise für einen ungeladenen Isolator Wellengleichungen ableiten, deren Lösungen die Eigenschaften solcher Wellen präzisieren: Verschiebungsdichte \vec{D} und magnetische Feldstärke \vec{H} schwingen senkrecht zur Ausbreitungsrichtung bzw. dem Wellenvektor \vec{k} und stehen senkrecht aufeinander. Im Vakuum ist außerdem \vec{D} parallel zu \vec{E} , der elektrischen Feldstärke. Transversalwellen sind polarisierbar, d. h. nach Passieren eines geeigneten optischen Bauelements beobachtet man nur noch Licht einer einzigen Schwingungsrichtung. Wechselwirkungen von Licht als elektromagnetischer Welle mit Materie gehen überwiegend vom elektrischen Feld \vec{E} aus, so dass die durch \vec{E} und \vec{k} gebildete Ebene auch als Schwingungsebene des Lichtes bezeichnet wird.

Die meisten Lichtquellen emittieren sogenanntes *natürliches Licht* mit keiner bevorzugten Schwingungsebene. Das liegt daran, dass die Atome bei jedem einzelnen Emissionsakt zwar einen polarisierten Wellenzug mit begrenzter Länge abstrahlen, in der großen Anzahl der auftretenden Wellenzüge aber alle Schwingungsrichtungen gleichverteilt vorkommen.

Bei *polarisiertem Licht* beschreibt die Spitze des \vec{E} -Feldvektors in einer festgehaltenen Ebene senkrecht zur Ausbreitungsrichtung eine Ellipse. Dabei ist der Drehsinn als rechts definiert bei Rotation des \vec{E} -Vektors im Uhrzeigersinn bei Blickrichtung gegen die Ausbreitungsrichtung. Spezialfälle hiervon sind ein Kreis bei *zirkular* polarisiertem und eine Gerade bei *linear* polarisiertem Licht. Zirkular polarisiertes Licht lässt sich als Überlagerung zweier senkrecht aufeinander stehender, um eine Viertel Periode in Ausbreitungsrichtung verschobener Teilwellen mit gleicher Amplitude und Frequenz auffassen. Die ungestörte Superposition verschieden gerichteter Komponenten zu einem neuen Feldstärkevektor \vec{E} (bzw. \vec{H}) ist im Vakuum und auch in Stoffen bei nicht zu hohen Feldstärken \vec{E} möglich.

2.1. Optische Aktivität

Als *optisch aktive* Substanzen bezeichnet man Stoffe, die die Schwingungsebene linear polarisierten Lichtes abhängig von der durchstrahlten Dicke, bei Lösungen zusätzlich abhängig von ihrer Konzentration, drehen. Optisch aktive Stoffe besitzen einen asymmetrischen Aufbau. Sie haben eine chirale Struktur. Kristallquarz beispielsweise kommt in der Natur in links- und rechtshändiger Version vor.

In Lösungen optisch aktiver Stoffe beträgt der Drehwinkel φ der Schwingungsebene:

$$\varphi = \varphi_0 d c . \quad (1)$$

φ_0 nennt man das *spezifische Drehvermögen*, d ist die durchstrahlte Dicke und c die Konzentration der Lösung, z. B. in *mol/l*.

TU Ilmenau	Physikalisches Grundpraktikum	Versuch O6
Institut für Physik	Optische Aktivität	Seite 2

Zur anschaulichen Erklärung der optischen Aktivität nutzt man die Tatsache, dass linear polarisiertes Licht als Überlagerung zweier zirkular polarisierten Teilwellen entgegengesetzten Drehsinns mit gleicher Amplitude und Frequenz aufgefasst werden kann (Abb. 1). Dabei breiten sich die rechts- und linksdrehende Komponente \vec{E}_r bzw. \vec{E}_l in dem optisch aktiven Stoff mit unterschiedlicher Phasengeschwindigkeit aus. Die Folge ist, dass die Drehwinkel α_r und α_l der beiden Komponenten an gleichen Orten unterschiedliche Beträge aufweisen. Ihre Überlagerung ergibt eine linear polarisierte Welle mit gedrehter Schwingungsebene (Abb. 2).

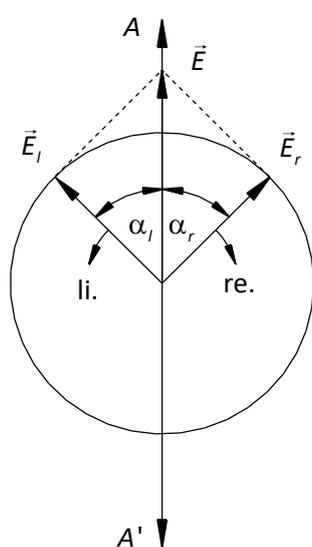


Abb. 1: Ausgangssituation bzw. Medium optisch nicht aktiv, Schwingungsrichtung $A'-A$ des Lichtes bleibt erhalten

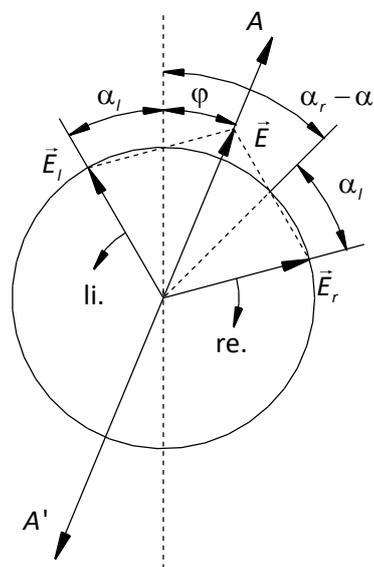


Abb. 2: Medium optisch aktiv, Schwingungsrichtung $A'-A$ des Lichtes dreht sich um $\varphi = \frac{\alpha_r - \alpha_l}{2}$

2.2. Faraday-Effekt

Bringt man ein durchsichtiges isotropes Material in ein starkes magnetisches Gleichfeld, so wird durch das Magnetfeld eine vorher nicht vorhandene Doppelbrechung im Material erzeugt. Eine umfassende Erklärung dieses *Faraday-Effekts* gelingt nur bei quantenmechanischer Betrachtung.

Schickt man nun linear polarisiertes Licht in Feldrichtung durch ein transparentes Material, so wird seine Schwingungsebene gedreht. Der Drehwinkel φ_F ist proportional zur magnetischen Induktion B und zur durchstrahlten Schichtdicke d :

$$\varphi_F = V B d . \quad (2)$$

V heißt *Verdet-Konstante* des Stoffes und ist abhängig von der Wellenlänge des Lichtes. Definitionsgemäß ist V positiv, wenn der Faraday-Effekt zu einer Linksdrehung der Polarisation führt (in diamagnetischen Stoffen) und negativ bei Rechtsdrehung (in paramagnetischen Stoffen).

TU Ilmenau	Physikalisches Grundpraktikum	Versuch O6
Institut für Physik	Optische Aktivität	Seite 3

3. Messanleitung und Auswertung

3.1. Optische Aktivität

Die Lage der Polarisationssebene kann mit einem Polarimeter gemessen werden. Der prinzipielle Aufbau des im Versuch verwendeten Kreis- bzw. Halbschattenpolarimeters ist in Abb. 3 dargestellt.

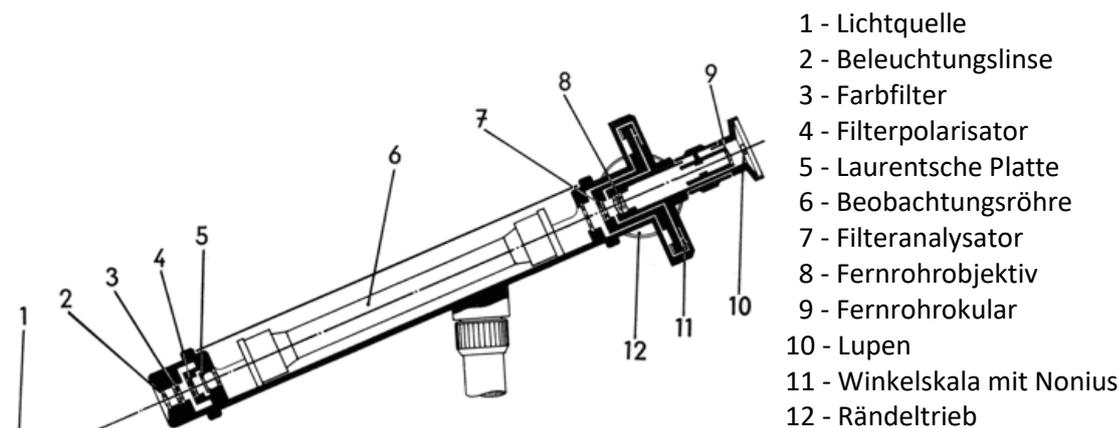


Abb. 3: Kreis- bzw. Halbschattenpolarimeter

Das Licht einer gelben Lichtemitterdiode (1) wird über die Linse (2) in das Gerät abgebildet. Das Farbfilter (3) lässt Licht mit einer Wellenlänge von 589nm passieren. Der Filterpolarisator (4) erzeugt das für die Messung benötigte, linear polarisierte Licht. In die Beobachtungsröhre (6) wird die Küvette mit der zu untersuchenden Flüssigkeit eingelegt. Durch Verdrehen des Filteranalysators (7) gegen den Polarisator kann man die Intensität des Lichtes beim Blick in das Beobachtungsfernrohr (8/9) zwischen maximaler Helligkeit und fast vollständiger Dunkelheit einstellen.

Mit dem Auge kann man gut kleinste Unterschiede erkennen, wenn verschiedene Intensitäten gleichzeitig im Sichtfeld sind. Aus diesem Grunde befindet sich eine schmale $\lambda/2$ -Platte (*Laurentsche Platte*, 5) hinter dem Polarisator. Diese besteht aus doppelbrechendem Quarz und dreht das polarisierte Licht des mittleren Teils des Sichtfeldes um einen Winkel von etwa 6° . Zunächst stellt man das Fernrohr mit dem Rändelring am Okular auf die Kanten der Laurentschen Platte scharf. Danach verstellt man den Analysator, so dass das gesamte Sichtfeld mit derselben Leuchtdichte erscheint. Dabei gibt es jeweils eine Einstellung mit hoher und eine mit niedriger Intensität. Wegen der Blendung des Auges ist die Messung in der „dunklen Position“ zu bevorzugen. An den beiden Winkelskalen kann man den eingestellten Winkel jetzt mit Hilfe des Nonius' auf $0,05^\circ$ genau ablesen (Abb. 4a-c). Jede Ablesung ist grundsätzlich als Mittelwert der beiden Skalen I (links) und II (rechts) zu verstehen.

Man misst zuerst die Drehwinkel für die beiden Lösungen mit den bekannten Konzentrationen. Anschließend trägt man die gefundenen Drehwinkel φ der Schwingungsebene über die gegebenen Konzentrationen c auf und berechnet eine Ausgleichsgerade durch den Koordinatenursprung (Auswertprogramm: lineare Regression). Nach Gl. (1) lässt sich nun mit einer Küvettenlänge von $d = (200,0 \pm 0,1) \text{ mm}$ und dem Anstieg der Ausgleichsgeraden das Drehvermögen φ_0 von Glucose berechnen. Das Ergebnis ist mit den zugehörigen Unsicherheiten anzugeben.

TU Ilmenau	Physikalisches Grundpraktikum	Versuch O6
Institut für Physik	Optische Aktivität	Seite 4

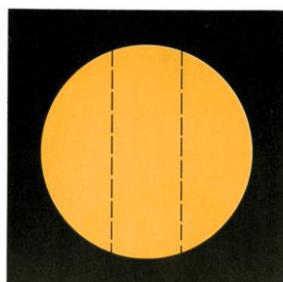
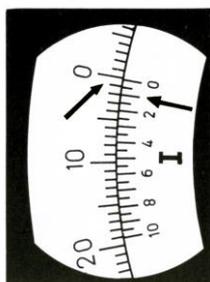


Abb. 4a:

Anfangsstellung des Nonius'. Im Gerät befindet sich keine Küvette. Der Teilkreis wurde auf gleiche Leuchtdichte der Gesichtsfeldteile eingestellt.

Ablesung: $+0,10^\circ$

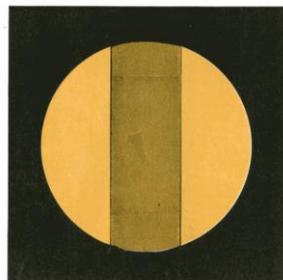
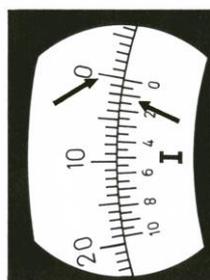


Abb. 4b:

Die befüllte Küvette wurde eingelegt. Wegen der nun größeren optischen Weglänge bis zur Laurentschen Platte muss das Fernrohr noch einmal auf maximale Schärfe der Kanten nachgestellt werden.

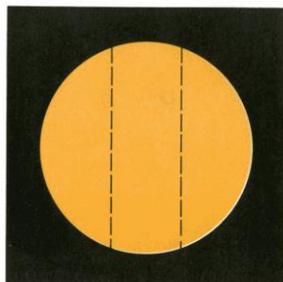
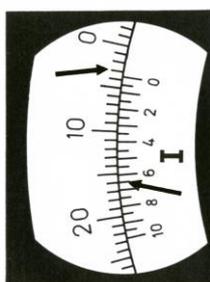


Abb. 4c:

Der Teilkreis mit Analysator wurde auf gleiche Leuchtdichte des Gesichtsfeldes nachgestellt.

Ablesung: $+3,65^\circ$

Drehung der Polarisationssebene also $+3,55^\circ$

Ebenfalls nach Gl. (1) berechnet man die unbekanntenen Konzentrationen der drei weiteren Glucoselösungen. Zur Berechnung der kombinierten Unsicherheit von c ist die Ablesegenauigkeit des Drehwinkels abzuschätzen.

3.2. Faraday-Effekt

Im Versuch wird der Faraday-Effekt mit Hilfe einer *dynamischen* Messmethode untersucht. Der experimentelle Aufbau ist schematisch in Abb. 5 dargestellt.

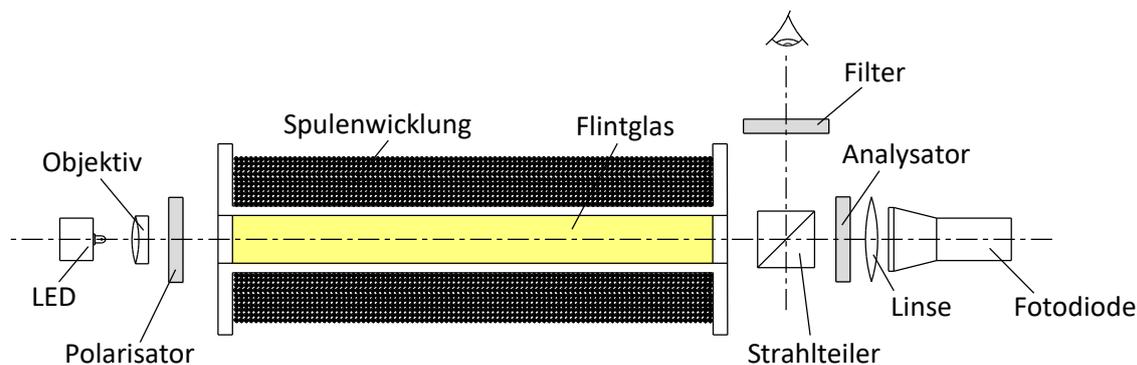


Abb. 5: Optischer Aufbau zur Untersuchung des Faraday-Effekts

TU Ilmenau	Physikalisches Grundpraktikum	Versuch O6
Institut für Physik	Optische Aktivität	Seite 5

Zentrales Element ist eine Spule mit einem Kern aus schwerem Flintglas. Die Spule wird von einem sinusförmigen Wechselstrom $i_s(t) = \hat{i}_s \sin(\omega t)$ durchflossen und erzeugt somit ein moduliertes Magnetfeld mit der Kreisfrequenz ω in Richtung der Spulenachse. Ein Objektiv bildet das Licht einer LED durch den Glasstab hindurch auf eine Linse ab, die es auf eine Fotodiode fokussiert. Das Licht ist nach Durchgang durch den Filterpolarisator linear polarisiert. Die Polarisationssebene des Analysators muss 45° gegen die des Polarisators eingestellt sein. In diesem Fall beträgt die hindurchgelassene Lichtintensität ohne Magnetfeld genau die Hälfte der maximal möglichen (vgl. *Gesetz von Malus*, s. Anhang).

Das magnetische Wechselfeld führt zu einer Intensitätsmodulation des den Analysator passierenden Lichts, was wiederum zu einer Modulation des Stroms der Fotodiode führt. Ein Strom-Spannungswandler wandelt diesen Fotostrom in eine gut messbare Spannung um. Die Spannung wird dann in ihren Gleich- und Wechselanteil getrennt. Beide Spannungen können jeweils mit einem Voltmeter gemessen werden. Durch Normieren der Wechselspannung auf den Gleichanteil U_c erhält man für die Drehung der Polarisationssebene als Folge des Faraday-Effektes:

$$\hat{\varphi}_F = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{u_{eff}}{U_c} \quad (3)$$

mit $\hat{\varphi}_F$ in *rad*. Der Faktor $\sqrt{2}$ ist darin begründet, dass Wechselspannungsmessgeräte üblicherweise den Effektivwert u_{eff} anzeigen. Die detaillierte Herleitung von (3) ist im Anhang zu finden.

Die im Versuchsaufbau eingesetzte Zylinderspule erzeugt in ihrem Inneren kein ausreichend homogenes Magnetfeld, Gl. (2) muss daher leicht modifiziert werden. Wenn die Spulenachse in z-Richtung zeigt, erhält man:

$$\varphi_F(t) = V \int_0^d B(z, t) dz = V K_S i_s(t), \quad (4)$$

mit d - Länge des Glasstabes und K_S - Spulenkonstante. Aus Gl. (3) und (4) folgt schließlich, wenn vom Spulenstrom sein Effektivwert $i_{s,eff}$ bestimmt wurde:

$$V = \frac{u_{eff} / U_c}{2 K_S i_{s,eff}} \quad (5)$$

in $\frac{rad}{T \cdot m}$. Die Spulenkonstante ist mit $K_S = 1,027 \cdot 10^{-3} \frac{T \cdot m}{A}$ gegeben.

Vorbereitung des optischen Aufbaus

- Polarisator und Analysator bringt man in Ausgangsstellung (0° , die Mikrometerschraube des Polarisatorhalters zeigt in Mittelstellung etwa die Position $4,5 mm$ an).
- Objektiv, Polarisator und Zylinderspule sind fest miteinander verbunden. Den Analysator und die Abbildungslinse stellt man so nah wie möglich an den Spulenhalter, ohne dass beim Verdrehen des Analysators optische Teile aneinander reiben.

TU Ilmenau	Physikalisches Grundpraktikum	Versuch 06
Institut für Physik	Optische Aktivität	Seite 6

- Die LED benötigt einen Konstantstrom von 30mA und muss sich in der Nähe der Brennebene des Objektivs befinden. Zur Justage empfiehlt sich die Verwendung der gelben LED. Der hinter der Spule befindliche Strahlteiler reflektiert einen geringen Teil des Lichtes aus dem Strahlengang und ist hilfreich bei der Justage.
- Zunächst schiebt man die LED nah an das Objektiv und schaut sich durch den Strahlteiler das Bild des leuchtenden Chips an. Der Abstand zum Objektiv wird soweit vergrößert bis die Chipoberfläche verschwimmt.
- Mit Hilfe eines weißen Papiers kann der Lichtstrahl an der Abbildungslinse sichtbar gemacht werden und ggf. mit der XY-Justierplatte des LED-Halters darauf zentriert werden.
- Anschließend justiert man die Fotodiode auf den Brennpunkt der Abbildungslinse und bringt die Streulichtabdeckung an. Die Feinjustage von LED und Fotodiode erfolgt abschließend mithilfe des Spannungswertes U_c am Fotodiodenverstärker, der mit dem analogen Messinstrument gemessen wird.
- Der Filteranalysator wird nun um etwa 45° gegen den Polarisator verdreht, so dass die Lichtintensität die Hälfte vom Maximalwert annimmt.

Durchführung

Für die Bestimmung der Verdet-Konstanten V stehen vier verschiedenfarbige LED zur Verfügung. Diese emittieren jeweils ein schmales spektrales Band mit zentralen Wellenlängen von:

- Blau: $463,3\text{nm}$, Grün: $528,5\text{nm}$, Gelb: $593,0\text{nm}$ und Rot: $627,5\text{nm}$

Nach jedem Wechsel der LED ist die Zentrierung des Lichtflecks auf der Abbildungslinse zu überprüfen und ggf. nach zu justieren. Alle anderen Einstellungen am optischen Aufbau bleiben unverändert. Am Fotodiodenverstärker (I-U-Wandler) kann mit Hilfe von zwei Drehschaltern die so genannten *Transimpedanz* (Verhältnis von Ausgangsspannung zum Eingangsstrom) an die vorliegende Lichtintensität angepasst werden. Mit dem linken, sechsstufigen Schalter stellt man die Verstärkung des Gesamtsignals ein (Gleich- und Wechselanteile). Mit dem rechten Schalter wird die zusätzliche Verstärkung des Wechselanteils geregelt (Faktor $\times 1/\times 10/\times 100/\times 1000$). Dieser Verstärkungsfaktor ist bei der Berechnung des Verhältnisses u_{eff}/U_c zu beachten.

Am Funktionsgenerator FG100 sind folgende Einstellungen vorzunehmen:

- Amplitude: zunächst $0V$
- Offset: aus
- Sweep: aus
- Signalform: Sinus
- Frequenz: 300Hz

TU Ilmenau	Physikalisches Grundpraktikum	Versuch O6
Institut für Physik	Optische Aktivität	Seite 7

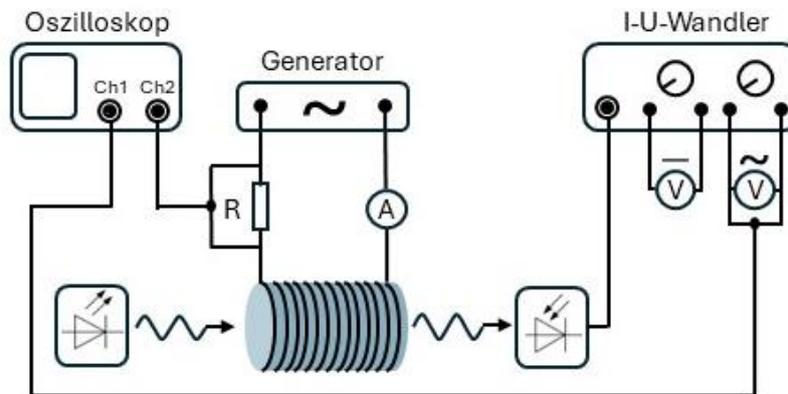


Abb. 6: Schaltplan

Für die Messung des Spulenstroms ist der Messbereich „10A (AC)“ am Digital-Multimeter einzustellen. Die Bestimmung der Verdet-Konstanten erfolgt als Messreihe mit verschiedenen Spulenströmen im Bereich von $i_{s,eff} = (0,1 \dots 1,0)A$ mit einer Schrittweite von $\Delta i_{s,eff} = 0,1A$. Trägt man in einem Diagramm den Quotienten der Messgrößen u_{eff}/U_c über dem Spulenstrom $i_{s,eff}$ auf und führt eine lineare Regression durch, dann ergibt sich mit S , dem Anstieg der Ausgleichsgeraden, aus (5):

$$V = \frac{S}{2K_s}. \quad (6)$$

Für die Berechnung der kombinierten Unsicherheiten sind die Angaben des Praktikumsprogramms zu verwenden. Die Unsicherheit der Spulenkonstanten kann vernachlässigt werden.

Die Wellenlängenabhängigkeit der Verdet-Konstanten ist in einem weiteren Diagramm darzustellen. Für das Zeichnen des Graphen empfiehlt sich die Verwendung der Regressionsfunktion „verschobene Hyperbel“ des Auswerteprogramms.

4. Kontrollfragen

1. Was ist polarisiertes Licht? Welche Spezialfälle kennen Sie?
2. Wodurch kann die Polarisationssebene von Licht verändert werden?
3. Was gibt die Verdet-Konstante an?

TU Ilmenau	Physikalisches Grundpraktikum	Versuch O6
Institut für Physik	Optische Aktivität	Seite 8

5. Anhang

5.1. Bestimmung der Verdetschen Konstanten mittels eines Modulationsverfahrens

Der optische Aufbau zur Bestimmung der Verdetschen Konstanten besteht im Wesentlichen aus einem Polarisator P , dem Flintglasstab und einem Analysator A . Der Polarisator legt das Koordinatensystem fest, sein Winkel betrage 0° . Die Polarisationsrichtung des Lichtes wird im Glasstab um einen Winkel φ_F gedreht (Faraday-Effekt) und erreicht den in Position φ_A eingestellten Analysator. In Abb. 7 sind die Verhältnisse bei Blick gegen die Lichtrichtung dargestellt. Das optisch aktive Material ist in dem gewählten Beispiel rechtsdrehend, vereinbarungsgemäß ist damit die Verdetsche Konstante V , wie auch der Winkel φ_F , negativ.

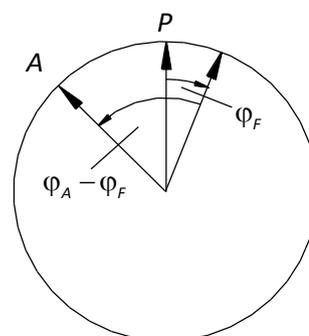


Abb. 7: Winkelverhältnisse

Für die Intensitäten des verwendeten Lichtes vor (I_0) und nach (I_1) dem Analysator gilt das *Gesetz von Malus*:

$$I_1 = T I_0 \cos^2(\varphi_A - \varphi_F). \quad (7)$$

Der Transmissionsgrad T berücksichtigt, dass die im Experiment verwendeten Filterpolarisatoren nicht ideal sind, sondern auch einen kleinen Teil der bevorzugten Polarisationsrichtung mit absorbieren.

Zur Erzielung einer hohen Messgenauigkeit (φ_F ist bei den realisierbaren Magnetfeldstärken klein), wird ein Modulationsverfahren angewendet, indem das Magnetfeld mittels eines harmonischen Wechselstromes der Kreisfrequenz ω durch die felderzeugende Spule moduliert wird. Damit folgt für φ_F , die zeitabhängige Drehung der Polarisationssebene:

$$\varphi_F(t) = \hat{\varphi}_F \sin(\omega t). \quad (8)$$

Der Amplitude $\hat{\varphi}_F$ muss in diesem Fall aber ein Vorzeichen zugeschrieben werden, welche zwischen positiver und negativer Verdetscher Konstante unterscheidet. Mathematisch gleichwertig wäre die Einführung eines Phasenwinkels (0 oder π) im Argument der Sinusfunktion, der auch messtechnisch, z. B. mithilfe eines Oszilloskops, festgestellt werden kann. (7) und (8) ergeben:

$$I_1(t) = T I_0 \cos^2[\varphi_A - \hat{\varphi}_F \sin(\omega t)] = \frac{T I_0}{2} \{1 + \cos[2\varphi_A - 2\hat{\varphi}_F \sin(\omega t)]\}. \quad (9)$$

Hieraus gewinnt man zunächst:

$$I_1(t) = \frac{T I_0}{2} \{1 + \cos(2\varphi_A) \cos[2\hat{\varphi}_F \sin(\omega t)] + \sin(2\varphi_A) \sin[2\hat{\varphi}_F \sin(\omega t)]\} \quad (10)$$

und nähert die zeitabhängigen Terme in (10) wegen $2\hat{\varphi}_F \ll 1$ gemäß $\cos x \approx 1 - x^2/2$ sowie $\sin x \approx x$ für kleine x . Geeignet umgeformt erhält man schließlich:

$$I_1(t) = \frac{T I_0}{2} \left[1 + \left(1 - \frac{\hat{\varphi}_F^2}{2}\right) \cos(2\varphi_A) + 2\hat{\varphi}_F \sin(2\varphi_A) \sin(\omega t) + \frac{\hat{\varphi}_F^2}{2} \cos(2\varphi_A) \cos(2\omega t) \right]. \quad (11)$$

TU Ilmenau	Physikalisches Grundpraktikum	Versuch O6
Institut für Physik	Optische Aktivität	Seite 9

Das letztendlich detektierbare optische Signal enthält drei wesentliche Anteile: eine Konstante, ein Wechselsignal mit der Modulationsfrequenz und eines mit der doppelten Modulationsfrequenz.

Interessant ist der Fall, dass der Analysator auf einen Winkel $\varphi_A = 45^\circ$ eingestellt ist. Gl. (11) vereinfacht sich dann erheblich, der Term mit $\sin(\omega t)$ wird maximal, darüber hinaus verschwinden die Signalanteile mit $\cos(2\omega t)$:

$$I_1(t) = T I_0 \left[\frac{1}{2} + \hat{\varphi}_F \sin(\omega t) \right]. \quad (12)$$

Der Gleichanteil (I_c) beträgt hierbei genau die Hälfte der unmodulierten Lichtintensität bei $\varphi_A = 0^\circ$ und ermöglicht so eine genaue Justage des Analysators.

Eine Normierung des Wechselanteils $\tilde{I} = T I_0 \hat{\varphi}_F \sin(\omega t)$ auf den statischen Anteil eliminiert die Unbekannten T sowie I_0 und man erhält eine einfache Beziehung zur Bestimmung des Winkels $\hat{\varphi}_F$:

$$\frac{\tilde{I}}{I_c} = 2 \hat{\varphi}_F \sin(\omega t). \quad (13)$$

Messgrößen sind die den Lichtintensitäten proportionalen Spannungswerte u und U_c (Detektion mit Fotodiode und U-I-Wandler). Übliche Wechselspannungsmessgeräte zeigen hierbei den Effektivwert u_{eff} an, für eine rein harmonische Schwingung verbleibt daher schließlich ($\hat{\varphi}_F$ in Bogenmaß!):

$$\hat{\varphi}_F = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{u_{eff}}{U_c}. \quad (14)$$

Die Verdettsche Konstante V verknüpft die Drehung der Polarisationssebene φ_F mit der magnetischen Flussdichte $B(z)$ längs des optischen Weges. Ist, wie im realisierten Versuchsaufbau, B in Lichtrichtung nicht konstant, erhält man zunächst:

$$\varphi_F(t) = V \int_0^d B(z, t) dz = V K_S i_S(t), \quad (15)$$

das Integral in (15) kann bei Kenntnis der konstruktiven Daten der felderzeugenden Spule (K_S) und dem durch die Wicklung fließenden Strom i_S berechnet oder experimentell bestimmt werden.

Angewandt auf Gl. (14) folgt hieraus:

$$\frac{\sqrt{2}}{2} \frac{u_{eff}}{U_c} = V K_S \hat{i}_S = V K_S \sqrt{2} i_{S,eff} \quad (16)$$

bzw.

$$V = \frac{u_{eff} / U_c}{2 K_S i_{S,eff}}. \quad (17)$$