

TU Ilmenau	Physikalisches Grundpraktikum	Versuch M6
Institut für Physik	Schiefer elastischer Stoß	Anhang Seite 1

1. Berücksichtigung endlicher Kugelradien

1.1. Stoßpunkt

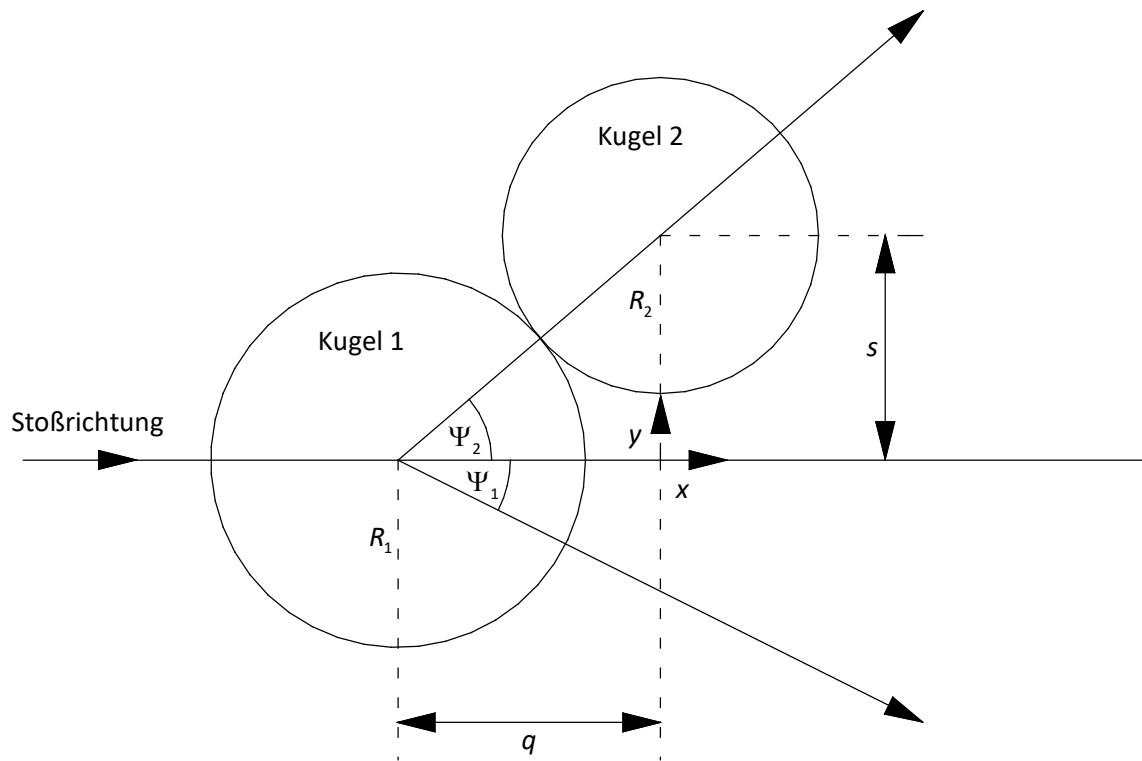


Abb. 1: Verhältnisse am Stoßpunkt

Kugel 2 wurde zur Realisierung des schiefen Stoßes um eine bestimmte Strecke s vom theoretischen Stoßpunkt (Koordinatenursprung) verschoben. Man kann einen Stoßparameter $\sigma = s/(R_1 + R_2)$ definieren und sieht sofort, dass

$$\sigma = \sin \Psi_2 \quad (1.1)$$

ist, sowie

$$\cos \Psi_2 = \frac{q}{R_1 + R_2}. \quad (1.2)$$

Also gilt

$$s = (R_1 + R_2) \cdot \sigma \quad (1.3)$$

und

$$q = (R_1 + R_2) \sqrt{1 - \sigma^2}. \quad (1.4)$$

Abhängig vom Stoßparameter σ wird Kugel 2 um die Strecke s in y -Richtung weiter außen auftreffen, während Kugel 1 um q , in Stoßrichtung betrachtet, zu kurz fällt. Die wirklichen Auftreffkoordinaten

TU Ilmenau	Physikalisches Grundpraktikum	Versuch M6
Institut für Physik	Schiefer elastischer Stoß	Anhang Seite 2

$(x'_{1,w}, y'_{1,w}, x'_{2,w}, y'_{2,w})$ hängen mit den bei punktförmigen Massen zu erwartenden (x'_1, y'_1, x'_2, y'_2) durch die Transformationsgleichungen

$$\begin{aligned} x'_{1,w} &= x'_1 - q & y'_{1,w} &= y'_1 \\ x'_{2,w} &= x'_2 & y'_{2,w} &= y'_2 + s \end{aligned} \quad (1.5)$$

zusammen. Die Reduktionsgleichungen für die wirklich gemessenen Koordinaten lauten also:

$$\begin{aligned} x'_1 &= x'_{1,w} + (R_1 + R_2) \sqrt{1 - \sigma^2} & y'_1 &= y'_{1,w} \\ x'_2 &= x'_{2,w} & y'_2 &= y'_{2,w} - (R_1 + R_2) \cdot \sigma \end{aligned} \quad (1.6)$$

Für den Kreis 2 (gestoßene Kugel) ist der Stoßparameter σ gemäß Gl. (1.1) näherungsweise aus den Auftreffkoordinaten errechenbar, wenn der theoretische Stoßpunkt bekannt ist (z. B. Fallpunkt F ohne Stoß bzw. aus vorläufigen Kreisparametern bestimmt, vgl. Abb. 2 zu Stoß 1).

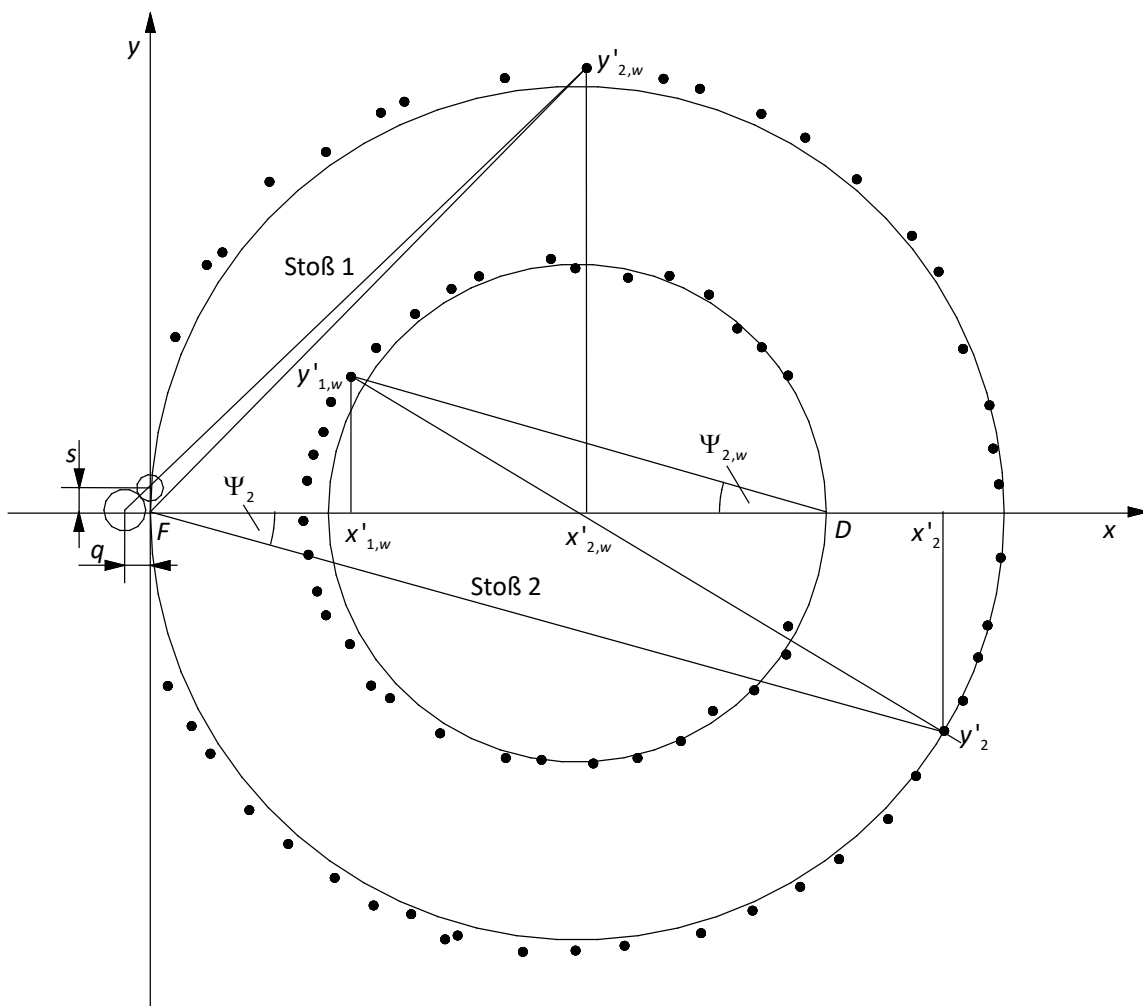


Abb. 2: Zur Reduktion der Auftreffkoordinaten

TU Ilmenau	Physikalisches Grundpraktikum	Versuch M6
Institut für Physik	Schiefer elastischer Stoß	Anhang Seite 3

Aus den abgelesenen Auftreffkoordinaten für einen Punkt des Stoßkreises 2 findet man:

$$\sigma = \frac{y'_{2,w}}{\sqrt{(x'_{2,w} + q)^2 + y'^2_{2,w}}} \approx \frac{y'_{2,w}}{\sqrt{x'^2_{2,w} + y'^2_{2,w}}}. \quad (1.7)$$

Nach erstmaliger genäherter Berechnung ist der Korrekturwert q jedoch schon etwas besser bekannt und Gl. (1.7) kann numerisch bis zur hinreichenden Genauigkeit wiederholt werden.

Die Auftreffpunkte der stoßenden Kugel (Kreis 1) liefern nicht sofort den Stoßparameter, weil die hierzu gehörenden Koordinaten des Stoßpartners nicht eindeutig auf dem Millimeterpapier zugeordnet werden können. Für punktförmige Massen kann man sie aber über den Impulserhaltungssatz errechnen:

$$p'_{2,x} = p_1 - p'_{1,x} \Rightarrow x'_2 = \frac{1}{\mu}(r_1 + r_2 - x'_1) \quad (1.8)$$

$$p'_{2,y} = -p'_{1,y} \Rightarrow y'_2 = -\frac{1}{\mu}y'_1. \quad (1.9)$$

wobei r_1 und r_2 die als bekannt vorausgesetzten Radien der Stoßreise sind. Wie aus Abb. 2 (zu Stoß 2) zu entnehmen ist, erscheint der Stoßparameter näherungsweise als

$$\sigma = \frac{-y'_{1,w}}{\sqrt{(r_1 + r_2 - x'_{1,w} - q)^2 + y'^2_{1,w}}} \approx \frac{-y'_{1,w}}{\sqrt{(r_1 + r_2 - x'_{1,w})^2 + y'^2_{1,w}}}. \quad (1.10)$$

Wie schon beim Stoßkreis 2 findet man σ vorläufig unter Vernachlässigung der Länge q und wiederholt die Rechnung bis zur hinreichenden Genauigkeit. Das Problem ist hierbei nur, dass die Radien der Stoßkreise bekannt sein müssen, diese aber erst ermittelt werden können, wenn die Koordinaten der Auftreffpunkte gemäß Gl. (1.6) korrigiert wurden (vgl. nächstes Kapitel).

Für eine erste Abschätzung kann aber auch die Distanz zwischen Fallpunkt F und Durchläuferpunkt D der stoßenden Kugel als Summe der beiden Kreisradien herangezogen werden.

1.2. Auftreffpunkt

Wenn auch nicht ganz so einflussreich wie am Stoßpunkt, bewirken die endlichen Kugelradien am Auftreffpunkt eine Verfälschung der Auftreffkoordinaten. Gegeben sei die Fallhöhe h_0 der Kugeln nach dem Stoß, gemessen von der Schwerpunkthöhe der Kugeln am Stoßpunkt bis zur Zeichenebene (bei diesem Versuch etwa 200 mm). Die Fallstrecke bis zum Auftreffen wird, abhängig vom Kugelradius R_K , auf die effektive Höhe $h = h_0 - R_K$ reduziert. Hieraus resultiert eine Fallzeit $t_f = \sqrt{2h/g}$.

Betrachtet man sich den Auftreffpunkt genauer, dann stellt man fest, dass der registrierte Auftreffpunkt um eine kleine Strecke Δs in Richtung der Bewegung in der xy -Ebene verschoben werden muss, da die Kugel als Massepunkt etwas weiter fliegen würde (Abb. 3).

TU Ilmenau	Physikalisches Grundpraktikum	Versuch M6
Institut für Physik	Schiefer elastischer Stoß	Anhang Seite 4

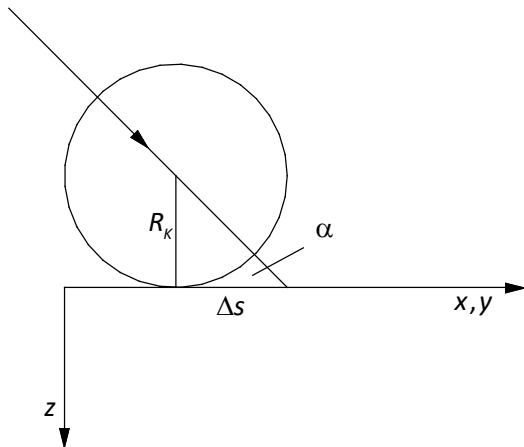


Abb. 3: Verhältnisse am Auftreffpunkt

Wenn $v'_{x,y}$ die Geschwindigkeit der Kugel parallel zur xy -Ebene ist, dann folgt für den Auftreffwinkel α :

$$\tan \alpha = \frac{v'_z}{v'_{x,y}} \approx \frac{R_K}{\Delta s}. \quad (1.11)$$

Mit der oben schon errechneten Fallzeit t_f erhält man leicht

$$\Delta s = R_K \frac{v'_{x,y}}{v'_z} = R_K \frac{s \sqrt{\frac{g}{2h}}}{\sqrt{2gh}} = \frac{R_K s}{2(h_0 - R_K)}. \quad (1.12)$$

s ist hierbei die zurückgelegte Wegstrecke parallel zur xy -Ebene und direkt auf dem Registrierpapier ablesbar.

2. Bestimmung der Kreisradien (Startparameter für Anpassung)

Wie im vorhergehenden Abschnitt gezeigt, benötigt man für die Reduktion der Koordinaten der Auftreffpunkte zumindest näherungsweise die Kreisradien. Da diese als Startparameter für die eigentliche Ausgleichsrechnung auch gefragt sind, wurde im Auswerteprogramm *PhysPract* auf die Eingabe der Koordinaten von Fallpunkt F und Durchläuferpunkt D verzichtet und stattdessen eine automatisierte Suchroutine implementiert, für deren erfolgreiche Ausführung folgende Bedingungen erfüllt sein müssen:

- Die Eingabe der Auftreffkoordinaten für beide Kugeln sollte insofern vollständig sein, als sich ein mehr als dreiviertel geschlossener Kreis abbilden lässt.
- Die Punkte sollten einigermaßen gleichverteilt angeordnet sein.
- Es dürfen keine Ausreißer (Tippfehler) enthalten sein.

Nach dem Durchsuchen der Messwerte findet das Programm einen vorläufigen Kreisdurchmesser und ordnet drei ausgewählte Messpunkte in Form eines ungefähr gleichseitigen Dreiecks an (Abb. 4). Als vorläufiger Kreismittelpunkt wird der Schnittpunkt zweier Mittelsenkrechten errechnet, in Parameterdarstellung erhält man zunächst:

$$c = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} x_2 - x_1 \\ y_2 - y_1 \end{pmatrix}, \quad (2.1)$$

$$b = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + \eta \begin{pmatrix} x_3 - x_1 \\ y_3 - y_1 \end{pmatrix}. \quad (2.2)$$

Die Gleichungen für die Mittelsenkrechten lauten dann:

$$c_{\perp} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ y_1 + y_2 \end{pmatrix} + \tilde{\mu} \begin{pmatrix} y_1 - y_2 \\ x_2 - x_1 \end{pmatrix}, \quad (2.3)$$

TU Ilmenau	Physikalisches Grundpraktikum	Versuch M6
Institut für Physik	Schiefer elastischer Stoß	Anhang Seite 5

$$b_{\perp} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} x_1 + x_3 \\ y_1 + y_3 \end{pmatrix} + \tilde{\eta} \begin{pmatrix} y_3 - y_1 \\ x_1 - x_3 \end{pmatrix}. \quad (2.4)$$

Gleichsetzen und Lösen des Gleichungssystems liefert beispielsweise den Parameter

$$\mu = \frac{1}{2} \frac{(x_2 - x_3)(x_1 - x_3) + (y_2 - y_3)(y_1 - y_3)}{y_1(x_3 - x_2) - y_2(x_3 - x_1) + y_3(x_2 - x_1)}, \quad (2.5)$$

womit sich die Koordinaten des Mittelpunktes nach Gl. (2.3) sowie der Kreisradius berechnen lassen.

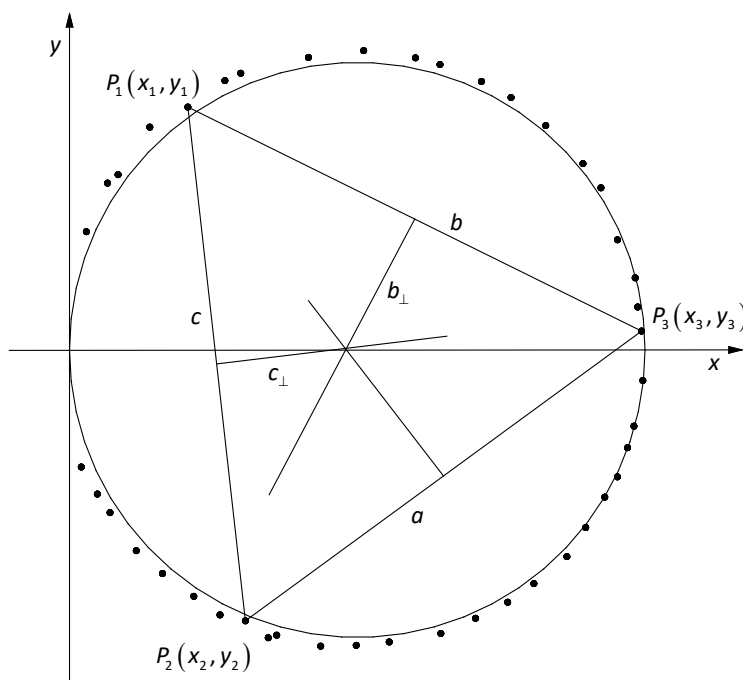
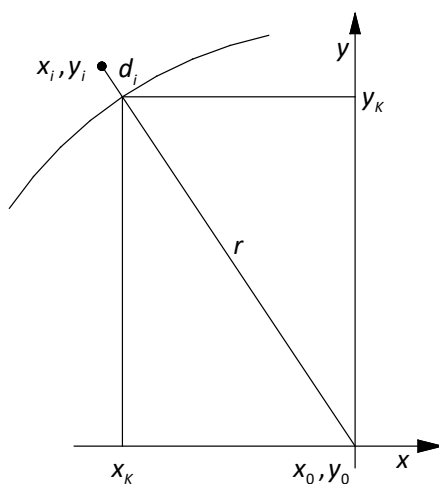


Abb. 4: Zur Bestimmung der Startparameter „Kreisradius“ und „Kreismittelpunkt“

3. Iteration der Kreisparameter



Für jeden der beiden Stoßkreise gilt es, nach der Reduktion der Auftreffkoordinaten die eigentlichen Kreisparameter zu bestimmen. Es sind dies die Koordinaten des Mittelpunktes x_0, y_0 sowie der Kreisradius r . Für jeden eingegebenen Auftreffpunkt mit den Koordinaten x_i, y_i lässt sich ein radialer (senkrechter) Abstand d_i vom anzupassenden Kreis definieren und mithilfe der aktuellen Kreisparameter berechnen:

$$d_i = \sqrt{(x_i - x_0)^2 + (y_i - y_0)^2} - r. \quad (3.1)$$

Abb. 5: Zur Bestimmung der Kreisparameter

TU Ilmenau	Physikalisches Grundpraktikum	Versuch M6
Institut für Physik	Schiefer elastischer Stoß	Anhang Seite 6

Optimale Kreisparameter findet man nach der Methode der kleinsten Quadrate, indem die normierte Summe S der Abweichungsquadrate d_i^2 aller Auftreffpunkte minimiert wird:

$$S = \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^N d_i^2 = \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^N \left[(x_i - x_0)^2 + (y_i - y_0)^2 - 2r \sqrt{(x_i - x_0)^2 + (y_i - y_0)^2} + r^2 \right] \Rightarrow \text{Min.}, \quad (3.2)$$

σ^2 sei hierbei die Varianz der gemessenen Auftreffkoordinaten. Es müssen also die partiellen Ableitungen von S jeweils nach x_0 , y_0 und r verschwinden, was auf drei Bestimmungsgleichungen für die optimalen Kreisparameter führt. Man erhält mit den verkürzten Schreibweisen $\tilde{x}_i = x_i - x_0$ und $\tilde{y}_i = y_i - y_0$:

$$\frac{\partial S}{\partial x_0} = \frac{2}{\sigma^2} \sum_{i=1}^N \tilde{x}_i \left(1 - \frac{r}{\sqrt{\tilde{x}_i^2 + \tilde{y}_i^2}} \right) = 0, \quad (3.3)$$

$$\frac{\partial S}{\partial y_0} = \frac{2}{\sigma^2} \sum_{i=1}^N \tilde{y}_i \left(1 - \frac{r}{\sqrt{\tilde{x}_i^2 + \tilde{y}_i^2}} \right) = 0, \quad (3.4)$$

$$\frac{\partial S}{\partial r} = \frac{2}{\sigma^2} \sum_{i=1}^N \left(r - \sqrt{\tilde{x}_i^2 + \tilde{y}_i^2} \right) = 0. \quad (3.5)$$

Während Gl. (3.5) analytisch berechnet werden kann und den angepassten Radius

$$r = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \sqrt{\tilde{x}_i^2 + \tilde{y}_i^2} \quad (3.6)$$

liefert, müssen Gl. (3.3) und (3.4) durch geschickte Variation von x_0 bzw. y_0 iterativ gelöst werden. Das Praktikumsprogramm „PhysPract“ verwendet hierzu ein modifiziertes Pegasus-Einschlussverfahren. Der Gesamtalgorithmus zur Bestimmung des besten Auftreffkreises sieht also für jeden Stoßpartner folgendermaßen aus:

1. Finden vorläufiger Kreisparameter x_0 , y_0 und r gemäß der in Abschnitt 2 vorgestellten Vorgehensweise
2. Reduktion der eingegebenen Koordinaten der Auftreffpunkte gemäß der Vorgehensweise in Abschnitt 1
3. Iterative Bestimmung von x_0 über Gl.(3.3), danach von y_0 über Gl. (3.4)
4. Analytische Bestimmung von r mithilfe von Gl. (3.6)
5. Wiederholung der Anpassung mit verbesserten Werten bei 2. bzw. Abbruch, wenn sich die Änderungen von x_0 , y_0 und r innerhalb eines vorgegebenen Genauigkeitsintervalls befinden.
6. Zur Berechnung der Unsicherheiten Δx_0 , Δy_0 und Δr benötigt man die empirische Standardabweichung der Messwerte in radialer Richtung. Sie folgt aus (3.1) bzw. (3.2):

$$s(r_i) = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N d_i^2}{N-3}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N \left[\sqrt{(x_i - x_0)^2 + (y_i - y_0)^2} - r \right]^2}{N-3}}. \quad (3.7)$$

Es muss jetzt untersucht werden, wie sich diese Unsicherheit auf den berechneten Parametersatz auswirken. Dem Gaußschen Fortpflanzungsgesetz für Unsicherheiten folgend, wird

TU Ilmenau	Physikalisches Grundpraktikum	Versuch M6
Institut für Physik	Schiefer elastischer Stoß	Anhang Seite 7

nacheinander jeder Messwert mit alternierendem Vorzeichen um den Betrag $s(r_i)$ in radialer Richtung variiert, die Anpassung der Parameter nach 3 bis 5 noch einmal vorgenommen und die Quadrate der Differenzen zu den ursprünglich gefundenen Werten gespeichert. Die Wurzel aus deren Summe ist dann die gesuchte Standardunsicherheit des Parameters.

4. Korrigiertes Radienverhältnis

Die Berechnung des Massenverhältnisses aus dem Radienverhältnis der Stoßkreise basiert auf der Voraussetzung, dass der Stoß ausschließlich in der xy-Ebene stattfindet. Tatsächlich ist dieser Fall bei der praktischen Versuchsdurchführung selten realisiert, weil entweder die Höhenjustage von Kugel 2 nur halbherzig durchgeführt wurde und/oder während des Stoßes durch Reibung vermittelte Tangentialkräfte (Kugel 1 rotiert!) eine zusätzliche z-Komponente des Impulserhaltungssatzes zu berücksichtigen ist, für welche ein bei allen Stößen gleicher Mittelwert angenommen werden soll:

$$v'_{1,z} = -\mu v'_{2,z}. \quad (3.8)$$

In der Folge sind die Fallzeiten $t_{f,1}$ bzw. $t_{f,2}$ der Kugeln nicht mehr gleich, so dass die Mittelpunkte der Stoßkreise in x-Richtung nicht zusammenfallen und auch das Radienverhältnis r_1/r_2 nicht dem durch Wägen gefundenen Massenverhältnis $\mu = m_2/m_1$ beider Kugeln entspricht.

Die für die Auswertung des Stoßversuches relevanten Kreisparameter (nach Reduktion der Auftreffkoordinaten, Kugeln sind Punktmassen) stellen sich somit folgendermaßen dar:

$$r_1 = \frac{\mu}{\mu+1} v_{1,x} t_{f,1} \quad (3.9)$$

$$r_2 = \frac{1}{\mu+1} v_{1,x} t_{f,2} \quad (3.10)$$

$$x_{0,1} = \frac{1}{\mu+1} v_{1,x} t_{f,1} \quad (3.11)$$

$$x_{0,2} = \frac{1}{\mu+1} v_{1,x} t_{f,2}. \quad (3.12)$$

Der Zusammenhang zwischen Fallstrecke h_0 und Fallzeit der Kugel lautet:

$$h_0 = \frac{g}{2} t_f^2 + v'_z t_f \Rightarrow t_f = \frac{1}{g} \left(\pm \sqrt{v'^2_z + 2g h_0} - v'_z \right). \quad (3.13)$$

Für beide Richtungen von v'_z gilt das positive Vorzeichen der Wurzel, darüber hinaus ist die Annahme kleiner v'_z gerechtfertigt, so dass sich folgende Näherung für t_f angeben lässt:

$$t_f \approx \frac{1}{g} \left(\sqrt{2g h_0} - v'_z \right) = \frac{1}{g} (v_f - v'_z). \quad (3.14)$$

Aus den vom Computerprogramm berechneten Kreisparametern kann man die Differenz der Kreismittelpunkte in Stoßrichtung $\Delta x_0 = x_{0,2} - x_{0,1}$ bilden. Mit Gl. (3.11), (3.12), (3.14) und (3.8) erhält man für diese Größe:

TU Ilmenau	Physikalisches Grundpraktikum	Versuch M6
Institut für Physik	Schiefer elastischer Stoß	Anhang Seite 8

$$\Delta x_0 = \frac{1}{\mu+1} \cdot \frac{v_{1,x}}{g} (v'_{1,z} - v'_{2,z}) = \frac{1}{\mu+1} \cdot \frac{v_{1,x}}{g} \left(v'_{1,z} + \frac{v'_{1,z}}{\mu} \right) = \frac{1}{\mu} \cdot \frac{v_{1,x}}{g} v'_{1,z} = -\frac{v_{1,x}}{g} v'_{2,z}. \quad (3.15)$$

Daraus folgt

$$v'_{1,z} = \frac{\mu g \Delta x_0}{v_{1,x}} \quad \text{bzw.} \quad v'_{2,z} = -\frac{g \Delta x_0}{v_{1,x}}, \quad (3.16)$$

und für die Radien der Auftreffkreise nach Gl. (3.9) und (3.10):

$$r_1 = \frac{\mu}{\mu+1} \left(\frac{v_{1,x} v_f}{g} - \mu \Delta x_0 \right), \quad (3.17)$$

$$r_2 = \frac{1}{\mu+1} \left(\frac{v_{1,x} v_f}{g} + \Delta x_0 \right). \quad (3.18)$$

Die Größen $v_{1,x}$ und v_f sind durch den vorliegenden Versuchsaufbau vorbestimmt und aus den Daten auf dem Registrierpapier nicht sofort ablesbar. Man kann aber eine „Flugweite“ x_m , die horizontale Entfernung vom Ende der Fallrinne (Fallpunkt F der kleinen Kugel 2) bis zum Auftreffpunkt D der nicht stoßenden Kugel 1 (Durchläufer) definieren. Das Produkt $v_{1,x} v_f$ lässt sich dann nach den Gesetzen des horizontalen Wurfs mittels $x_m = v_{1,x} t_f$ und $t_f = \sqrt{2h_0/g}$ durch experimentell zugängliche Parameter ersetzen:

$$v_{1,x} t_f = \sqrt{2gh_0} x_m \sqrt{\frac{g}{2h_0}} = x_m g, \quad (3.19)$$

womit aus Gl. (3.17) und (3.18) schließlich

$$r_1 = \frac{\mu}{\mu+1} (x_m - \mu \Delta x_0) \quad (3.20)$$

$$r_2 = \frac{1}{\mu+1} (x_m + \Delta x_0) \quad (3.21)$$

wird. Die Strecke x_m wäre hierbei durch ein Zusatzexperiment bzw. Registrierung der ohnehin häufig auftretenden Durchläufer bestimmbar. Für einen idealen Stoß ohne vertikale Impulskomponenten entspräche diese Distanz der Summe $r_1 + r_2$.

Stellt man Gl. (3.20) und (3.21) nach x_m um und setzt beide gleich, dann führt dies auf

$$r_1 \frac{\mu+1}{\mu} + \Delta x_0 (\mu+1) = r_2 (\mu+1), \quad (3.22)$$

und man erhält hieraus endgültig:

$$\mu = \frac{r_1}{r_2 - \Delta x_0}. \quad (3.23)$$

Es ist also möglich, auch bei Auftreten einer (nicht zu großen) z-Komponente des schiefen elastischen Stoßes, das Massenverhältnis der beteiligten Stoßpartner aus den gut zugänglichen experimentellen Daten auf dem Registrierpapier zu bestimmen!