FAKULTÄT FÜR MATHEMATIK UND NATURWISSENSCHAFTEN
INSTITUT FÜR PHYSIK
Dr. rer. nat. Norbert Stein

Zur Behandlung von Messergebnissen im Physikalischen Grundpraktikum

1. Messabweichungen und ihre Ursachen

Bei hinreichend hoher Genauigkeit der Messmittel liefern mehrere Messungen am gleichen Objekt unter gleichen Bedingungen in der Regel nicht das gleiche Messergebnis. Jedes Messergebnis x stellt einen Schätzwert für den Wert der Messgröße X dar. Die Abweichung kann durch ein Unsicherheitsintervall gekennzeichnet werden und wird nach DIN 1319 heute als Messabweichung bezeichnet.

Schließt man grobes Fehlverhalten der Person, die die Messung ausführt (z. B. falscher Gebrauch eines Messinstrumentes, falsches Notieren des Ergebnisses) aus, dann lassen sich verbleibende Messabweichungen traditionell in 2 Kategorien einteilen:

Systematische oder methodische Abweichungen sind durch die verwendete Messanordnung festgelegt und können im Prinzip durch eine Korrekturrechnung erfasst und zu Null gemacht werden. Die dafür benötigten Angaben sind jedoch häufig nicht bekannt oder ihre Bestimmung wäre zu aufwändig. Charakteristisch für systematische Abweichungen ist, dass bei der Wiederholung von Messungen unter gleichen Bedingungen ihr Anteil nach Betrag und Vorzeichen konstant bleibt. Systematische Messabweichungen können verursacht werden durch:

- falsch kalibrierte Maßstäbe oder Gerätefehler
- Fehlerhaftigkeit des Messobjekts (z. B. unreine Stoffe)
- Veränderung des Messobjekts während der Messung (z. B. thermische Ausdehnung)
- Beeinflussung des Messobjekts durch den Messvorgang
- Nichtbeachten gesetzmäßiger physikalischer Zusammenhänge, die den Messvorgang beeinflussen
- fehlerhafte Messung durch den Beobachter (z.B. Parallaxe)

Im Versuchsprotokoll sind die erkannten systematischen Messabweichungen verbal zu erfassen und ihre Größenordnung nach Möglichkeit abzuschätzen.

Zufällige oder statistische Abweichungen entstehen im Ergebnis einer großen Zahl voneinander unabhängiger zufälliger Einflüsse, die weder durch das subjektive Verhalten des Messenden (z. B. besondere Sorgfalt) noch durch die Messmethode (z. B. Präzisionsgeräte) vermieden oder korrigiert werden können. Verursacht werden statistische Messabweichungen unter anderem durch nicht erfassbare und nicht beeinflussbare Versuchs- und Umgebungsbedingungen, Unvollkommenheiten beim Erfassen der Messwerte oder durch den statistischen Charakter der Messgröße selbst (radioaktiver Zerfall). Für statistische Abweichungen gilt:

- Es werden rein zufällige Abweichungen vom wahren Wert bewirkt, die Richtung der Abweichung (positiv oder negativ) ist prinzipiell unbekannt.
- Die Abweichungen schwanken um den Wert der Messgröße, kleinere Abweichungen treten häufiger auf als große, bei letzteren müssen sich ja viele zufällige Abweichungen in gleicher Richtung addieren.
- Positive und negative Abweichungen treten bei hinreichend vielen Messungen gleich häufig auf.

Die statistische Messabweichung ist also eine Zufallsgröße im Sinne der Wahrscheinlichkeitsrechnung und kann als normalverteilt angesehen werden.

Als Messunsicherheit oder kurz Unsicherheit bezeichnet man die unzureichende Kenntnis des Wertes der Messgröße (quantitative Beschreibung der Qualität der Messung). Das Messergebnis ist nach erfolgter Korrektur hinsichtlich der bekannten systematischen Einflüsse immer noch nur ein Schätzwert. Es verbleibt eine Unsicherheit, die sich aus zufälligen Einflüssen und unvollkommener Berichtigung oben genannter systematischer Einflüsse ergibt.

2. Praktische Bewertung von Messergebnissen

Die Vorgehensweise zur Bestimmung der Standardunsicherheit eines Messergebnisses richtet sich in der Regel nach der Anzahl n der zur Bestimmung der Messgröße durchgeführten Einzelmessungen. Für Messreihen mit $n \geq 10$ kommt die *Ermittlungsmethode A* zum Einsatz, wurde nur einmal gemessen oder mussten Messreihen mit $n < 10$ ausreichen, ist die *Ermittlungsmethode B* für die Standardunsicherheit anzuwenden.

Im Normalfall ist die im Experiment zu bestimmende Größe nicht selbst Messgröße, sondern eine Funktion mehrerer Messgrößen. In beiden aufgeführten Fällen hat man zur Formulierung des Messergebnisses seine *kombinierte Standardunsicherheit* zu berechnen.

2.1. Standardunsicherheit nach Ermittlungsmethode A (statistische Methode)

Im Praktikum wird die statistische Methode zur Bestimmung der Standardunsicherheit angewandt, wenn Messreihen mit mindestens zehn erfassten Werten vorliegen. Ist die beobachtete Abweichung einer Messung eine Zufallsgröße im Sinne der Wahrscheinlichkeitsrechnung, dann strebt die Wahrscheinlichkeitsdichte $p(x)$ für $n \to \infty$ gegen die so genannte Gaußsche Normalverteilung:

$$p(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

mit μ - Wert der Messgröße und σ - Standardabweichung bzw. σ^2 - Varianz (Abb. 1).

Die Standardabweichung σ markiert die Wendepunkte der Gaußverteilung und ist ein Maß für die Güte der Messung, $68{,}27\%$ aller Messergebnisse liegen im schraffierten Bereich der Darstellung. Erweitert man die Intervallgrenzen, dann liegen bei 2σ $95{,}45\%$, bei 3σ $99{,}73\%$ aller Messwerte innerhalb dieser Grenzen. In praktischen Fällen ist $\mathrm{n} > 10$, aber eine immer noch vergleichsweise kleine Zahl. Als Schätzwert der Messgröße dient dann das arithmetische Mittel

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \text{ .}$$

Eine Näherung für die Güte der Einzelmessung ist die empirische Standardabweichung $s(x_i)$. Sie ist die positive Wurzel der empirischen Varianz $s^2(x_i)$:

$$s(x_i) = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2} \text{ .}$$

Der Schätzwert s strebt für $n \to \infty$ dem festen Grenzwert σ zu, der von der Güte

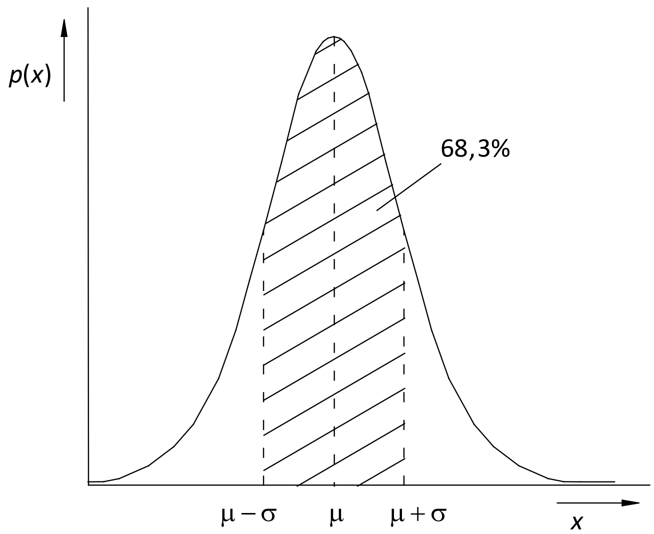

Abb. 1: Gaußsche Normalverteilung

des Messverfahrens und von der Sorgfalt des Beobachters abhängt.

Zu dem Mittelwert $\overline{x}$ einer Anzahl von Messungen können nach der Gaußschen Fehlerfortpflanzungstheorie zwei Grenzen oberhalb und unterhalb des gefundenen Mittelwertes angegeben werden, innerhalb derer sich (bei Abwesenheit systematischer Abweichungen) der Wert der Messgröße mit einem gewissen Vertrauensniveau P befindet. Zur Bestimmung dieser Grenzen betrachtet man $\overline{x}$ als Funktion der einzelnen Messwerte $x_1, x_2, \dots x_n$ und berechnet die empirische Standardabweichung des Funktionswertes $\overline{x} = f\left(x_1, x_2, \dots x_n\right)$. Man findet schließlich

$$s(\overline{x}) = \frac{s(x_i)}{\sqrt{n}} = \sqrt{\frac{1}{n(n-1)}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2}$$

als empirische Standardabweichung des Mittelwertes. Den Bereich $\overline{x} \pm t \cdot s\left(x_i\right) / \sqrt{n}$ nennt man Vertrauensbereich des Mittelwertes. Der Wert der Zahl t hängt ab vom Vertrauensniveau P, mit der der wahre Wert zwischen der unteren Vertrauensgrenze $\overline{x} - t \cdot s\left(\overline{x}\right)$ und der oberen Vertrauensgrenze $\overline{x} + t \cdot s\left(\overline{x}\right)$ liegen soll, sowie von der Anzahl der Messwerte (siehe Tabelle).

	t-Werte für		
n	$P = 68{,}3\%$	$P = 95{,}4\%$	$P = 99{,}7\%$
3	1,32	4,30	19,21
5	1,15	2,78	6,62
6	1,11	2,57	5,51
10	1,06	2,26	4,02
100	1,00	2,00	3,04
200	1,00	2,00	3,00

Bei vorgegebenem P wird die Breite des Vertrauensbereiches mit wachsender Anzahl der Messwerte proportional $1/\sqrt{n}$ immer kleiner. Die Genauigkeit der Bestimmung einer physikalischen Größe kann damit bei Vernachlässigung systematischer Messabweichungen beliebig gesteigert werden, der/die Messende muss selbst entscheiden, wie sinnvoll die Vergrößerung der Anzahl der Messungen ist.

Im Physikalischen Grundpraktikum wird ein Vertrauensniveau $P = 68{,}3\%$ gefordert, das bedeutet $t = 1$ bei $n \geq 10$. Damit wird die empirische Standardabweichung des Mittelwertes $s\left(\overline{x}\right)$ als Standardunsicherheit des Mittelwertes angegeben, also $x = \overline{x} \pm s\left(\overline{x}\right)$.

2.2. Standardunsicherheit nach Ermittlungsmethode B (Abschätzung)

Die Messgröße wurde nur einmal oder wenige Male gemessen. Die Varianz (vom Typ B) $u^2\left(x_i\right)$ oder die Standardunsicherheit $u\left(x_i\right)$ wird vom Praktikanten auf der Grundlage einer kritischen Analyse des Messverfahrens, der Messmittel und des subjektiven Aufwandes beim Messen abgeschätzt. Die zahlenmäßige Angabe erfolgt als Fehlergrenze entweder absolut $x \pm u\left(x_i\right)$ oder relativ $x \cdot \left(1 \pm u(x_i)/x\right)$, dabei wird $u\left(x_i\right)/x$ meist in Prozent angegeben. Als Richtwerte können folgende Angaben gelten:

analoge Messgeräte:	$\pm\left(0{,}5 \dots 1\right)$ mal Einheit der Skalenteile bzw. Herstellerangabe
digitale Messgeräte:	± 1 mal Einheit der letzten Stelle, die sich während der Messung nicht ändert, mindestens aber Herstellerangaben, falls vorhanden

Wird x mehrere Male gemessen, dann ist auch hier der arithmetische Mittelwert

$$\overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$$

als Näherungs- oder Schätzwert für die Größe X anzunehmen. Die Güte des Messergebnisses hängt in diesem Fall nicht von der Anzahl der wenigen Messungen ab.

2.3. Ermittlung der kombinierten Standardunsicherheit

Wird die gesuchte Größe f als Funktion einer oder mehrerer Messgrößen $x_i \pm \Delta x_i$ berechnet, wobei Δx_i deren Standardunsicherheit nach den Ermittlungsmethoden A oder B ist, dann kann die kombinierte Standardunsicherheit $u_c\left(f\right)$ mit Hilfe der partiellen Ableitungen $\partial f / \partial x_i$ angegeben werden. Voraussetzung dafür ist, dass die Größen x_i voneinander unabhängig, also nicht korreliert sind, die Größen Δx_i ebenfalls voneinander unabhängig und hinreichend klein sind ($\Delta x_i / x_i < 10\%$).

Bei vorangegangener Abschätzung der Unsicherheiten gemäß Methode B (vgl. 2.2) sollen sich die Beiträge nicht gegenseitig kompensieren können und man verwendet deren Beträge für die Ermittlung von u_c:

$$u_c\left(f\right) = \sum_{i=1}^{n} \left| \frac{\partial f}{\partial x_i} \Delta x_i \right| ,$$

bei Vorliegen der Voraussetzungen für eine statistische Fortpflanzung der Unsicherheiten (vgl. 2.1) ist u_c mittels

$$u_c\left(f\right) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \Delta x_i \right)^2}$$

zu berechnen.

Bei der Diskussion der Zuverlässigkeit von Protokollwerten ist zu beachten, dass die im Versuchsprotokoll verbal eingeschätzte, systematische Messabweichung quantitativ immer zu einer hier nicht erfassten additiven Zusatzgröße in Δx_i führt. Das Ergebnis wird abschließend als $f(x_1, x_2, x_3, \ldots) \pm u_c(f)$ bzw. $f(x_1, x_2, x_3, \ldots) \cdot \left(1 \pm u_c(f) / f\right)$ angegeben.

3. Praktische Beispiele

In einigen einfachen, aber wichtigen Fällen kann die Berechnung der kombinierten Unsicherheit $u_c\left(f\right)$ ohne zeitraubende Berechnung der partiellen Ableitungen erfolgen. Basierend auf ebendieser Vorgehensweise erhält man für:

a) Summe $f = x_1 + x_2$ und Differenz $f = x_1 - x_2$

   $u_c\left(f\right) = \left|\Delta x_1\right| + \left|\Delta x_2\right|$

b) Produkt $f = x_1 \cdot x_2$ und Quotient $f = x_1 / x_2$

   In diesen beiden Fällen ist es günstig, die *relativen* Unsicherheiten anzugeben.

$$\frac{u_c(f)}{f} = \left|\frac{\Delta x_1}{x_1}\right| + \left|\frac{\Delta x_2}{x_2}\right|$$

Für den Quotienten ergibt sich die gleiche relative Unsicherheit wie für das Produkt. Von Vorteil ist hierbei auch, dass sich die physikalischen Einheiten für jede eingehende Größe wegkürzen.

c) Potenzprodukt $f = x_1^{\alpha} \cdot x_2^{\beta} \cdot x_3^{\gamma}$, α, β, γ beliebig, reell

$$\frac{u_c(f)}{f} = \left|\alpha \cdot \frac{\Delta x_1}{x_1}\right| + \left|\beta \cdot \frac{\Delta x_2}{x_2}\right| + \left|\gamma \cdot \frac{\Delta x_3}{x_3}\right|$$

d) Natürlicher Logarithmus einer normierten Größe $f = \ln(x/x_0)$, x_0 fest, ohne Unsicherheit

$$u_c(f) = \left|\frac{\Delta x}{x}\right|$$

Die *absolute* Unsicherheit des Logarithmus‘ ist gleich der *relativen* Unsicherheit des Arguments.

Für gemischte Ausdrücke f können die angegebenen Regeln kombiniert angewendet werden, wenn die einzelnen Ausdrücke, in die f zerlegt wird, unabhängig voneinander gemessen wurden.

Literatur:	Schenk, W. Kremer, F. (Hrsg.)	Physikalisches Praktikum Vieweg + Teubner Verlag | Springer Fachmedien Wiesbaden GmbH 13. Auflage 2011, S. 10-17
	W. Walcher	Praktikum der Physik B. G. Teubner Stuttgart 8., überarbeitete Auflage 2004, S. 28-39
	E. Hering R. Martin M. Stohrer	Physik für Ingenieure VDI-Verlag, 5. Auflage 1995, S. 9-18
	DIN, Deutsches Institut für Normung e. V. (Hrsg.)	Leitfaden zur Angabe der Unsicherheit beim Messen Berlin, Zürich, Beuth 1. Auflage 1995