TECHNISCHE UNIVERSITÄT ILMENAU

Protokoll zum Versuch M10 „Federpendel“

1. Aufgabenstellung:

1. Über die Messung der Schwingungsdauer eines Federpendels soll die Federkonstante D einer Feder ermittelt werden.
2. Durch die Messung der Auslenkung der Feder als Funktion der angehängten Masse ist die Erdbeschleunigung g zu bestimmen.

2. Grundlagen:

Wirkt eine äußere Kraft auf einen Körper, so verformt sich dieser. Man bezeichnet die Verformung als elastisch, wenn diese vollkommen reversibel ist nach Ende der Kraftwirkung. Bei Überschreiten einer bestimmten Kraft treten plastische Verformungen auf, es kommt schließlich zum Bruch bzw. Zerreißen des Materials. Innerhalb der Elastizitätsgrenze des Körpers gibt es einen linearen Zusammenhang zwischen einwirkender Kraft und resultierender Verformung. Es gilt das Hooke`sche Gesetz. Im konkreten Fall einer Schraubenfeder lautet dieses:

$$F = -D \cdot l \,, \tag{1}$$

d.h. die Verlängerung l der Feder ist proportional zur Kraft F, mit der die Feder gedehnt wird. Der Proportionalitätsfaktor D heißt Federkonstante.
Ein Federpendel besteht aus einer Schraubenfeder und einer angehängten Masse. Im Ruhezustand halten sich die Gewichtskraft und die Federkraft im Gleichgewicht. Stört man diesen Zustand, in dem man die Masse nach unten auslenkt und somit die Feder zusätzlich dehnt, so wirkt eine rücktreibende Kraft, die die Auslenkung wieder rückgängig macht. Auf Grund ihrer Trägheit bewegt sich die Masse jedoch über die Ruhelage hinaus. Es kommt zu einer harmonischen Schwingung. Vernachlässigt man Reibungsverluste, erhält man folgende Differentialgleichung für das Federpendel:

$$m \cdot \ddot{l} = -D \cdot l \tag{2}$$

Die zugehörige Lösung lautet:

$$l(t) = l_0 \cdot \cos(\omega t) \text{ mit } \omega = \sqrt{\frac{D}{m}} \tag{3}$$

wobei x_0 die Auslenkung bei t=0 ist. Man erhält somit für die Periodendauer T des Federpendels:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{D}} \,. \tag{4}$$

Misst man die Periodendauer T als Funktion der Masse m so kann man darüber die Federkonstante D bestimmen.
Wird an die Feder eine Masse m gehängt, so gilt:

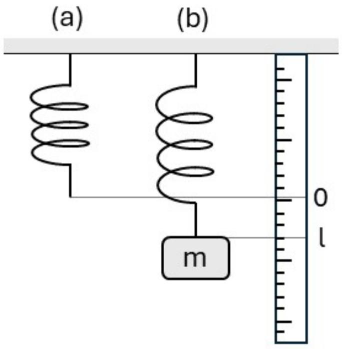
$$m \cdot g = D \cdot l \tag{5}$$

Ist also die Federkonstante bekannt, kann über diesen Zusammenhang die Erdbeschleunigung g ermittelt werden.

3. Versuchsbeschreibung

Der Versuchsaufbau besteht aus einer Spiralfeder, die an einem festen Haken aufgehängt ist. Am unteren Ende der Feder können verschiedene Massen angehängt werden und die entsprechende Auslenkung der Feder an dem daneben befindlichen Lineal abgelesen werden.

Skizze:



4. Versuchsdurchführung

1. Zunächst hängt man an die Feder eine Masse von 70g und regt das Federpendel zu einer Schwingung an. Um die Schwingungsdauer zu ermitteln wird die Zeit von 30 Schwingungen mit der Stoppuhr gemessen. Diese Messung wird anschließend wiederholt. Wenn die beiden gemessenen Zeiten nicht wesentlich voneinander abweichen, wird die angehängte Masse um 20g erhöht und erneut zweimal die Zeit für 30 Schwingungen gemessen. Dieses Vorgehen wiederholt sich bis insgesamt 150g angehängt sind. Der genaue Wert der angehängten Masse ist jeweils durch zusätzliches Wägen zu ermitteln.

2. Es wird die Auslenkung l als Funktion der angehängten Masse gemessen. Begonnen wird bei 10g und dann in 20g-Schritten bis auf 150g erhöht. Auch hier wird die genaue Masse durch Wägen ermittelt.

5. Messwerte

Versuchsteil 1

Masse m (in g)	**Zeit t_1=30*T (in s)**	**Zeit t_2=30*T (in s)**	**Mittelwert T (in s)**	**T^2 (in s^2)**
69,67	18,1	18,3	0,607	0,368
89,58	20,8	20,3	0,685	0,469
109,61	22,8	22,2	0,750	0,563
129,53	25,0	24,4	0,823	0,677
149,50	26,0	26,4	0,873	0,762

Versuchsteil 2

Masse m (in g)	**Auslenkung l (in cm)**
9,88	24,1
29,79	26,4
49,78	28,8
69,67	31,3
89,58	33,7
109,61	36,3
129,53	38,6
149,50	41,2

Messungenauigkeit der Messgeräte

Stoppuhr: Δt = 1 Skalenteil = 0,1s
Waage: Δm = 0,01 g (Herstellerangabe)
Lineal: Δl = ½ Skalenteil = 0,5mm

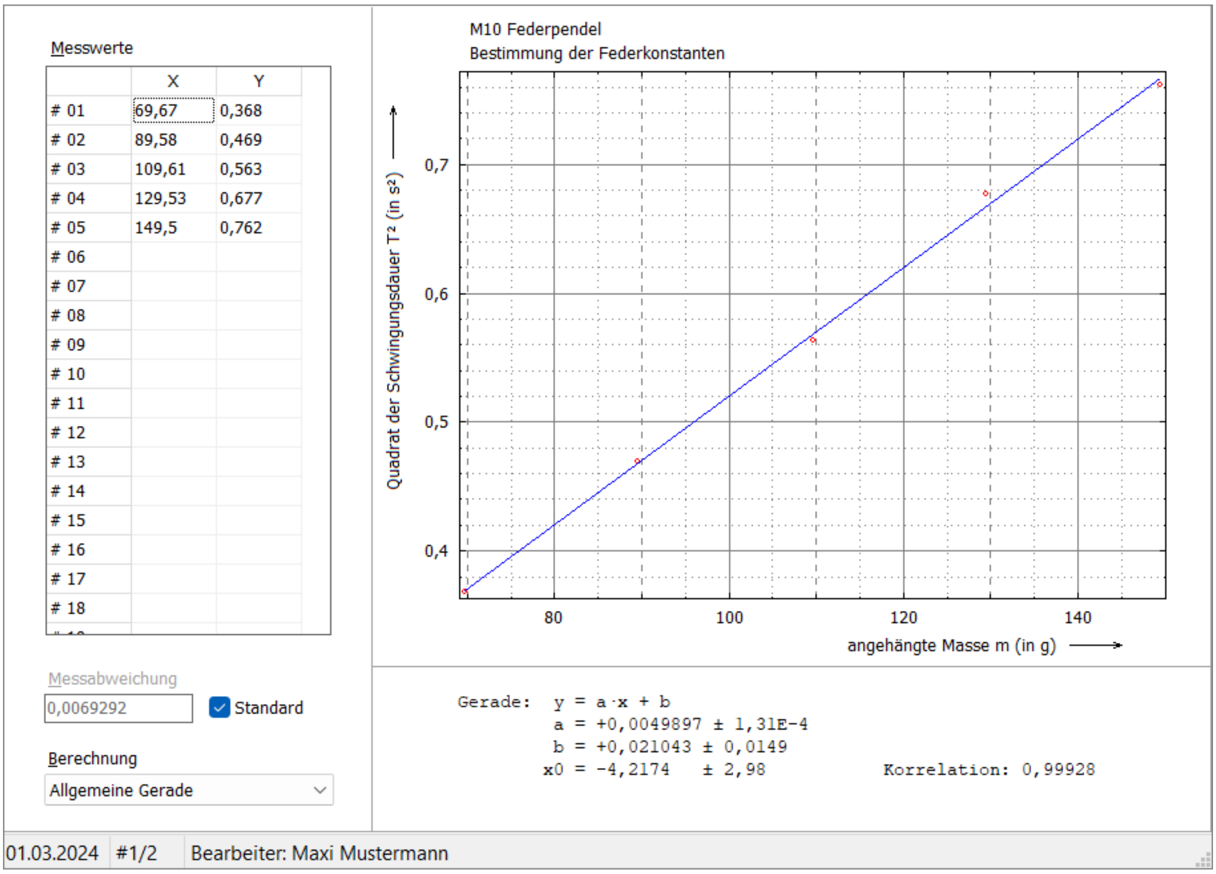
6. Auswertung

Versuchsteil 1

Gemäß Gleichung (4) gilt:

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{D} m\,. \tag{6}$$

Trägt man nun also T^2 als Funktion von m in einem Diagramm auf, so kann man aus dem Anstieg a der Regressionsgeraden die Federkonstante D berechnen.



Der Anstieg beträgt: $a_1 = (0,0049 \pm 0,00013)\frac{s^2}{g} = (4,99 \pm 0,13)\frac{m}{N}\,.$

Daraus lässt sich mit Hilfe von Gl. (6) die Federkonstante berechnen

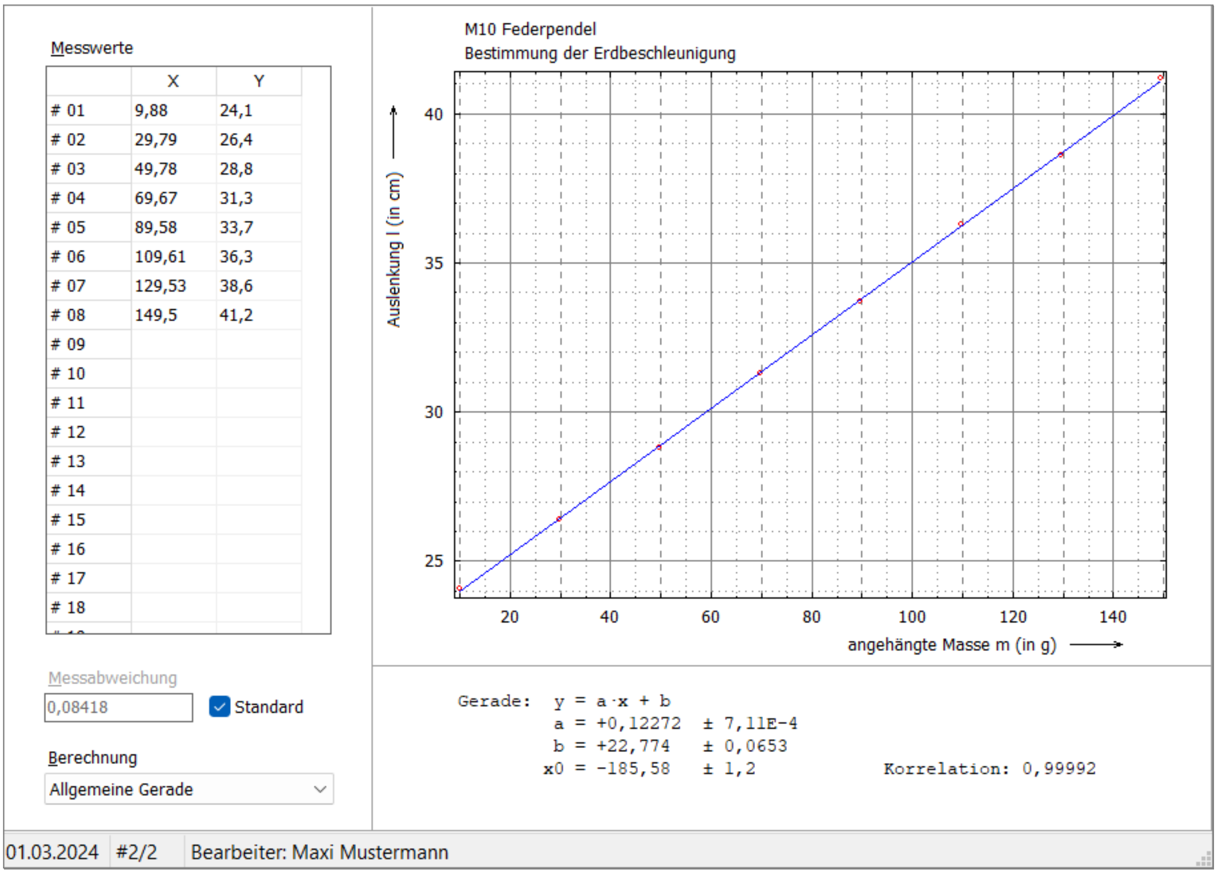
$$D = \frac{4\pi^2}{a_1} = \frac{4\pi^2}{4,99\frac{m}{N}} = 7,911\frac{N}{m}\,,$$

sowie ihre Unsicherheit gemäß Fehlerfortpflanzung

$$\Delta D = \left|\frac{\partial D}{\partial a_1}\right| \Delta a_1 = \frac{4\pi^2}{a_1^{\,2}} \Delta a_1 = \frac{4\pi^2}{24{,}9\,\frac{m^2}{N^2}} \cdot 0{,}13\,\frac{m}{N} = 0{,}206\,\frac{N}{m}.$$

Versuchsteil 2

Entsprechend Gl. (5) erhält man durch Auftragung der Auslenkung l als Funktion der angehängten Masse aus dem Anstieg den Quotienten g/D.



Demnach gilt $$a_2 = (0{,}1227 \pm 0{,}0007)\frac{cm}{g} = (1{,}227 \pm 0{,}007)\frac{m}{kg},$$

woraus für die Erdbeschleunigung g folgt:

$$g = a_2 \cdot D = 1{,}227\,\frac{m}{kg} \cdot 7{,}911\,\frac{N}{m} = 9{,}707\,\frac{m}{s^2},$$

sowie für deren Unsicherheit:

$$\Delta g = \left|\frac{\partial g}{\partial a_2}\right| \Delta a_2 + \left|\frac{\partial g}{\partial D}\right| \Delta D = D \cdot \Delta a_2 + a_2 \cdot \Delta D$$

$$\Delta g = 7{,}911\,\frac{N}{m} \cdot 0{,}007\,\frac{m}{kg} + 1{,}227\,\frac{m}{kg} \cdot 0{,}206\,\frac{N}{m} = 0{,}308\,\frac{m}{s^2}$$

7. Ergebnis und Fehlerdiskussion

Im Experiment konnte der theoretisch erwartete lineare Zusammenhang zwischen dem Quadrat der Schwingungsdauer und der angehängten Masse nachgewiesen werden. Außerdem konnte die Gültigkeit des Hooke'schen Gesetzes für die verwendete Spiralfeder gezeigt werden.

Die Federkonstante wurde zu $D = (7{,}911 \pm 0{,}206)$ N/m und die Erdbeschleunigung zu $g = (9{,}707 \pm 0{,}308)$ m/s^2 bestimmt. Dieser Wert schließt den in der Literatur angegebenen lokalen Wert für Ilmenau von 9,811 m/s^2 ein.

Als mögliche Fehlereinflüsse auf das Ergebnis sind die Messungenauigkeiten der verwendeten Messgeräte zu nennen. Der Einfluss der Reaktionszeit auf die gemessene Periodendauer wurde versucht zu minimieren, in dem man jeweils die Zeit von 30 Schwingungen gemessen hat.