

Versuch O8 - Regression für verdrehtes Glasplättchen

Herleitung: Der Praktikumsversuch O8 (Michelson-Interferometer) beschäftigt sich in seinem dritten Teil mit der Änderung der optischen Weglänge in einem Zweig des Interferometers, wenn sich dort ein Glasplättchen mit einstellbarem Winkel zur optischen Achse befindet. Für die Anzahl Z der auf dem Schirm hervorquellenden (oder verschwindenden) Interferenzringe bei Verdrehung des Plättchens um den Winkel α war folgender Zusammenhang hergeleitet worden:

$$Z(\alpha) = \frac{2d}{\lambda} \left(1 - \cos \alpha + \sqrt{n^2 - \sin^2 \alpha} - n \right). \quad (1)$$

Für kleine Verdrehwinkel ($\alpha \leq 10^\circ$) kann man (1) parabolisch nähern, wenn bei bekannter Glasdicke d und Laserwellenlänge λ die Brechzahl des untersuchten Materials bestimmt werden soll. Wird α größer, müssen numerische Verfahren eingesetzt werden, um die gesuchten Parameter zu ermitteln. Für die weiteren Ausführungen wird α durch x und Z durch y ersetzt.

Seien x_1, x_2, \dots, x_N die im Bogenmaß notierten Verdrehwinkel und y_1, y_2, \dots, y_N die gezählten Interferenzringe, dann lautet mit σ^2 , der Varianz der Messwerte, die normierte Abweichungsquadratsumme der Messwerte nach (1):

$$S = \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^N \left\{ y_i - \frac{2d}{\lambda} \left[1 - \cos(x_i - x_0) + \sqrt{n^2 - \sin^2(x_i - x_0)} - n \right] \right\}^2. \quad (2)$$

Anzupassende Parameter sind hierbei der Nullwinkel x_0 des Drehtisches mit Glashalter, die Brechzahl n des Glases und optional seine Dicke d mit dem Ziel, dass S minimal wird. Die ersten partiellen Ableitungen der Abweichungsquadratsumme (2) nach den Parametern x_0, n und d müssen also verschwinden. Für d erhält man:

$$\frac{\partial S}{\partial d} = \frac{2}{\sigma^2} \sum_{i=1}^N \left\{ y_i - \frac{2d}{\lambda} \zeta_i \right\} \left(-\frac{2}{\lambda} \right) \zeta_i = 0, \quad (3)$$

wobei $\zeta_i = 1 - \cos(x_i - x_0) + \sqrt{n^2 - \sin^2(x_i - x_0)} - n$ gesetzt wurde. (3) lässt sich gut nach d umstellen, sodass dieser Parameter analytisch bestimmt werden kann:

$$d = \frac{\lambda}{2} \frac{\sum_{i=1}^N y_i \zeta_i}{\sum_{i=1}^N \zeta_i^2}. \quad (4)$$

Für den Nullwinkel x_0 des Drehtisches folgt nach analoger Behandlungsweise:

$$\sum_{i=1}^N \left\{ y_i - \frac{2d}{\lambda} \left[1 - \cos(x_i - x_0) + v_i - n \right] \right\} \cdot \sin(x_i - x_0) \cdot \left[\frac{\cos(x_i - x_0)}{v_i} - 1 \right] = 0, \quad (5)$$

Hierbei verkürzt $v_i = \sqrt{n^2 - \sin^2(x_i - x_0)}$ die Schreibweise und auch später die numerischen Berechnungen. (5) ist jetzt nicht mehr nach x_0 umstellbar, die Nullstelle muss durch numerisches „Probieren“ gefunden werden.

Der eigentlich interessierende Parameter d lässt sich ähnlich x_0 gewinnen. Auch hier ist die Nullstelle der partiellen Ableitung $\frac{\partial S}{\partial n}$ nur numerisch bestimmbar. Mit $v_i = \sqrt{n^2 - \sin^2(x_i - x_0)}$ wie in (5) erhält man dann:

$$\sum_{i=1}^N \left\{ y_i - \frac{2d}{\lambda} \left[1 - \cos(x_i - x_0) + v_i - n \right] \right\} \cdot \left(\frac{n}{v_i} - 1 \right) = 0. \quad (6)$$

Durchführung der Regression: Zweckmäßigerweise setzt man vor Beginn der Regression schon annähernd passende Startwerte ein ($d \approx 1,5$, $x_0 \approx 0$, $d \approx 1 \text{ mm}$ oder gemessen). Danach wird folgende Programmschleife solange durchlaufen, bis sich die gesuchten Parameter in einer angegebenen Genauigkeit nicht mehr ändern:

- Anpassung des Nullwinkels numerisch nach (5). Es kommt hierbei ein modifiziertes Pegasus-Einschlussverfahren nach Anderson-Bjoerk zur Anwendung.
- Berechnung der Glasdicke analytisch nach (4)
- Anpassung der Brechzahl, wieder numerisch nach (6). Auch hier wird das Pegasus-Einschlussverfahren benutzt.

Berechnung der Unsicherheiten: Zunächst wird die empirische Standardabweichung der Einzelwerte $s(y_i)$ berechnet. Die Anzahl p der zu variierenden Parameter kann zwei oder drei betragen:

$$s(y_i) = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N \left\{ y_i - \frac{2d}{\lambda} \left[1 - \cos(x_i - x_0) + \sqrt{n^2 - \sin^2(x_i - x_0)} - n \right] \right\}^2}{N - p}}. \quad (7)$$

Es muss jetzt untersucht werden, wie sich die Unsicherheiten Werte y_i auf den berechneten Parametersatz $P_1, P_2, (P_3) \equiv P_j$ auswirken. Nach dem Gaußschen Fortpflanzungsgesetz für Unsicherheiten wird nacheinander jeder gemessene y -Wert mit alternierendem Vorzeichen um den Betrag $s(y_i)$ variiert, die Anpassung der Parameter P_j noch einmal vorgenommen und die Quadrate der Differenzen ΔP_j^2 zu den ursprünglich gefundenen Werten gespeichert. Die Wurzel aus deren Summe ist dann die gesuchte Standardunsicherheit des Parameters.

Nullstellenbestimmung mittels eines Einschlussverfahrens (Pegasus):

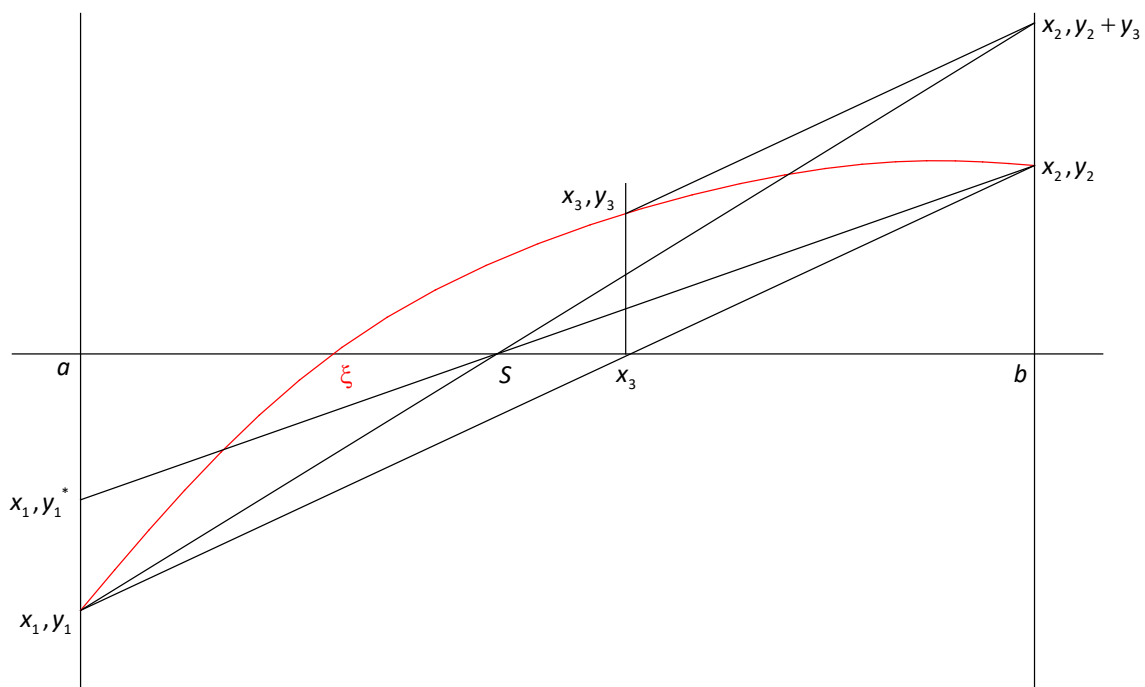


Abb. 1: Geometrische Veranschaulichung des vorgestellten Einschlussverfahrens ($\xi \equiv P_j$)

a) Startbedingung: $y(a) y(b) < 0$

b) Iterationsbeginn: $x_1 := a$ $x_2 := b$
 $y_1 := f(x_1)$, $y_2 := f(x_2)$

c) Iteration:

1. *Steigung*: $S_{12} := \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$, $x_3 := x_2 - \frac{y_2}{S_{12}}$

Test: $y_3 := f(x_3)$ wenn $y_3 = 0$, dann fertig ($\xi := x_3$)

2. *Berechne neues Einschlussintervall*:

i. $y_3 y_2 < 0$, dann $x_1 := x_2$, $y_1 := y_2$ und weiter bei c.

ii. $y_3 y_2 > 0$, dann wird $P_1 = \{x_1, y_1\}$ modifiziert:

$$P_{1,y} := g P_{1,y}$$

mit

$$g := \frac{y_2}{y_2 + y_3} \quad \text{(Pegasus) bzw.}$$

$$g := 1 - \frac{y_3}{y_2}, \quad \text{wenn } g \leq 0, \text{ dann } g := 0,5 \quad \text{(Anderson-Björk)}$$

iii. $x_2 := x_3$, $y_2 := y_3$ für beide Fälle und weiter bei 1.

d) Abbruch:

$$|x_2 - x_1| < \varepsilon$$

1. $y_1 y_2 < 0$

$$\xi := \frac{x_1 y_2 - x_2 y_1}{y_2 - y_1}$$

2. $y_1 y_2 \geq 0$

wenn $|y_2| < |y_1|$, dann $\xi := x_2$, sonst umgekehrt

Ilmenau, den 13.03.2020