Institut für Mathematik
Karl Worthmann

TECHNISCHE UNIVERSITÄT ILMENAU

Angewandte Analysis

5. Übungsserie zur Besprechung am 7.12.2018

Aufgabe 11

Betrachten Sie das System

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{pmatrix} r(t) \\ \varphi(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r(t)u(t) \\ -u(t) \end{pmatrix}, \qquad x^0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

(a) Lösen Sie zunächst das Anfangswertproblem in Abhängigkeit von $u \in \mathcal{U}$.

(b) Bestimmen Sie die Menge $K(t; x^0)$ und untersuchen Sie sie auf Konvexität.

Aufgabe 12

Betrachten Sie das zweidimensionale Anfangswertproblem

$$\dot{x}(t) = \begin{pmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{pmatrix}, \qquad x^0 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

(a) Zeigen Sie, dass $K(t; x^0)$ ein Quadrat ist und skizzieren Sie $\mathcal{RC}(x^0)$.

(b) Für eine messbare Funktion $\Phi : [0,1] \to \mathbb{R}$ mit $\int_0^1 \Phi(s)ds = 0$ betrachten wir die Steuerung $u(t) = (1, \Phi(t))^\top$. Beweisen Sie, dass u eine zeitoptimale Steuerung ist, falls $\mathcal{T}(t) = \{0\}$ für $t \geq 0$.

Aufgabe 13

Betrachten Sie das skalare Steuerungsproblem mit Differentialgleichung

$$\dot{x}(t) = t^3 \sin(1/t) u(t),$$

Steuerbeschränkungen $-1 \leq u(t) \leq 1$ und Endbedingung $\mathcal{T}(t) = \{0\}$ für alle $t \geq 0$. Zeigen Sie, dass $\mathcal{C}(1) = [-a, a]$ mit

$$a = \int_0^1 t^3 \; |\sin(1/t)| \; \mathrm{d}t.$$

Beweisen Sie zudem, dass man die Randpunkte von $\mathcal{C}(1)$ nur nach 0 steuern kann, wenn man eine Steuerung verwendet, die unendlich viele Sprungstellen besitzt.