Institut für Mathematik
Karl Worthmann

TECHNISCHE UNIVERSITÄT
ILMENAU

Angewandte Analysis

6. Übungsserie zur Besprechung am 1.2.2019

Aufgabe 14: Es sei $\Theta(t)$ die Auslenkung eines Pendels ohne Reibung zum Zeitpunkt t. Wird das Pendel mit einer Kraft u angetrieben, dann kann Θ approximativ durch Lösungen der linearen DGL

$$\ddot{\Theta}(t) = -\Theta(t) + u(t).$$

beschrieben werden. Wir formulieren dies als System erster Ordnung

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{pmatrix}\Theta(t)\\ \dot{\Theta}(t)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\Theta(t)\\ \dot{\Theta}(t)\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix}u(t), \quad \mathcal{T}(t) = \left\{(0,0)^\top\right\}. \tag{1}$$

(a) Zeigen Sie mit Hilfe des Maximumprinzips, dass jede zeitoptimale Steuerung $u \in \mathcal{U}[0,T]$, die den Anfangszustand $(\Theta(0), \dot{\Theta}(0))^\top$ in die Ruhelage $(\Theta(T), \dot{\Theta}(T))^\top = (0,0)^\top$ steuert, periodisch und vom Bang-Bang-Typ ist.

(b) Zeigen Sie, dass das System (1) normal ist und folgern Sie die Eindeutigkeit der zeitoptimalen Steuerung.

(c) Betrachten Sie nun (1) mit den konstanten Steuerungen $u \equiv 1$ und $u \equiv -1$. Weisen Sie nach, dass die Trajektorien $x(\cdot; x^0, u)$ Kreise mit Mittelpunkt $(1,0)^\top$ bzw. $(-1,0)^\top$ sind.

(d) Bestimmen Sie die zeitoptimale Steuerung für den Anfangswert $x^0 = (4,0)^\top$.

Aufgabe 15 (Problem mit fester Endzeit)
Betrachten Sie das skalare Problem

$$\dot{p}(t) = -u(t), \quad 0 \le t \le 1 \qquad \text{mit} \qquad p(0) = p(1) = 0.$$

Als Kostenfunktion $J : \mathcal{U}_{\mathrm{PC}} \to \mathbb{R}$ wählen wir

$$J(u) := \int_0^1 u(t) + 1\,\mathrm{d}t$$

mit $u(t) \in \Omega = [-1, 1]$.

(a) Um das PMP anzuwenden führen wir eine zusätzliche Zustandsvariable q ein und betrachten das Hilfssystem

$$\begin{pmatrix}\dot{p}(t)\\ \dot{q}(t)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-u(t)\\ 1\end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix}p(0)\\ q(0)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix} \qquad \text{mit} \qquad \mathcal{T}(t) = \begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix}.$$

Zeigen Sie, dass die Mengen der zulässigen Steuerungen des ursprünglichen und des erweiterten Systems übereinstimmen. Bestimmen Sie eine Optimalsteuerung

(b) Bestimmen Sie mit Hilfe der Konstruktion aus (a) eine Optimalsteuerung für die Dynamik $\ddot{p}(t) = -u(t)$ mit den zusätzlichen Anfangs- und Zielwerten $\dot{p}(0) = \dot{p}(1) = 0$.

(c) Bestimmen Sie eine Optimalsteuerung für das System aus (a) mit den Kosten $J(u) := \int_0^1 u(t)^2 \, \mathrm{d}t$ und dem Anfangswert $p(0) = 1$.

Aufgabe 16: Wir betrachten das Raketenauto, beschrieben durch das lineare System $\dot{p}(t) = q(t)$, $\dot{q}(t) = u(t)$ mit der Kostenfunktion $J : \mathcal{U}_{\mathrm{PC}} \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$, $u \mapsto \int_0^{t_1} q(t)^2 \mathrm{d}t$, und der Zielmenge $\mathcal{T}(t_1) = \{0\}$.

(a) Bestimmen Sie die dynamischen Kosten $x_0(t)$, das erweiterte System in den Variablen (x_0, p, q) und das zugehörige adjungierte System.

(b) Zeigen Sie mit Hilfe des PMP, dass eine Optimalsteuerung nur existiert, wenn die Anfangswerte auf der Kurve $q = -\sqrt{2p}$ für $p \geq 0$ oder auf der Kurve $q = \sqrt{-2p}$ für $p \leq 0$ liegen.