Institut für Mathematik
Karl Worthmann

TECHNISCHE UNIVERSITÄT
ILMENAU

Angewandte Analysis

1. Übungsserie zur Besprechung am 12.10.18

Aufgabe 1
Wir betrachten das Problem der *weichen Landung* auf dem Mars. Eine Raumkapsel der Masse m ist ausgestattet mit einem Antrieb der eine nach oben oder unten wirkende Kraft $f(t)$ auf die Landestufe ausüben kann. Die Höhe der Kapsel über der Marsoberfläche zum Zeitpunkt t sei $h(t)$ und die Gravitationskonstante auf dem Mars sei g. Die Flughöhe genügt dann der Differenzialgleichung

$$m\ddot{h}(t) = -mg + f(t), \quad t \geq 0; \quad h(0) = \xi_1,\ \dot{h}(0) = \xi_2, \qquad (*)$$

wobei ξ_1 die Anfangshöhe und ξ_2 die Anfangsgeschwindigkeit sind. Das Problem der weichen Landung besteht darin, den Schub so zu steuern, dass zu einem Endzeitpunkt $t_1 = 0$ sowohl $h(t_1) = 0$ (Bodenkontakt) als auch $\dot{h}(t_1) = 0$ (keine Geschwindigkeit) gilt.

(a) Formuliere $(*)$ zunächst als Anfangswertproblem erster Ordnung und anschließend als ein lineares System $\dot{x}(t) = Ax(t) + bu(t)$ wobei die Steuerung durch $u(t) = f(t)/m - g$ gegeben ist. Bestimme die Zielmenge $\mathcal{T}(t)$ für das Problem der weichen Landung!

(b) Zeige, dass es für jedes $t_1 > 0$ eine affin-lineare Steuerung der Form $u(t) = \alpha + \beta t$ mit $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ existiert, die das Problem der weichen Landung löst, das heißt $x(t_1) \in \mathcal{T}(t_1)$.

(c) Wir treffen nun die realistischere Annahme, dass der Schub nur aufwärtsgerichtet und nach oben beschränkt ist, d.h. $0 \leq f(t) \leq F$. Um die Schwerkraft überwinden zu können, müssen wir $F > mg$ annehmen. Sei $h(0) > 0$ und $\dot{h}(0) = 0$. Zeige, dass $t_2 > 0$ und $t_1 \in (0, t_2)$ existieren, sodass $x(t_2) \in \mathcal{T}(t_2)$ gilt, wenn die stückweise konstante Steuerung

$$u(t) = \begin{cases} -g, & \text{für } 0 \leq t < t_1, \\ \frac{F}{m} - g, & \text{für } t_1 \leq t \leq t_2. \end{cases}$$

verwendet wird.

Hinweis: *Verwende für (b) und (c) die Variation der Konstanten-Formel.*

Aufgabe 2
Modelliere eine Fischfarm: Nimm hierzu an, dass die Fischpopulation $x(\cdot)$ ohne äußere Einwirkungen durch die logistische DGL

$$\dot{x}(t) = r\left(1 - \frac{x(t)}{K}\right)x(t)$$

mit Konstanten r und K beschrieben wird. Hierbei beschreibt K das maximale Fassungsvermögen der Farm und r das Verhältnis von Geburts- zur Sterberate. Die Population wird durch den Fischfang, der proportional zur Population $x(\cdot)$ angenommen wird, gesteuert:

$$u(t) = -Ex(t), \quad 0 < E < r.$$

(a) Beschreiben Sie die Dynamik der Population x der Farm durch eine skalare Differentialgleichung und bestimmen Sie anschließend die Lösung.

(b) Bestimmen Sie die Gleichgewichte der DGL, das heißt die Lösungen $x(\cdot; x^*)$ mit $x(t; x^*) = x^*$ für alle $t \geq 0$.

(c) Zeigen Sie, dass für einen beliebigen Anfangswert $x^0 > 0$ gilt, dass $\lim_{t\to\infty} x(t; x^0) = x^*$ für das Gleichgewicht $x^* > 0$ aus (b).

(d) Für welchen Wert von E wird die Fangzahl Ex^* maximal?