Institut für Mathematik
Karl Worthmann

TECHNISCHE UNIVERSITÄT
ILMENAU

Angewandte Analysis

2. Übungsserie zur Besprechung am 26.10.18

Aufgabe 3
Bestimmen Sie die *Erreichbarkeitsmenge* $\mathcal{RC}(x^0)$, den *Erreichbarkeitskegel* $K(t;x^0)$ und die Menge $\mathcal{C}$ der *zulässigen Anfangszustände* für das eindimensionale Problem

$$\dot{x}(t) = ax(t) + u(t), \quad x(0) = x^0 > 0,$$

mit $u \in \mathcal{U}$ und $\mathcal{T}(t) = \{0\}$ für alle $t \geq 0$.

Unterscheiden Sie dabei die Fälle $a > 0$ und $a < 0$ sowie die Fälle $x^0 \geq |1/a|$ und $x^0 < |1/a|$.

Aufgabe 4
Betrachten Sie das System

$$\dot{x}(t) = \begin{pmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{pmatrix} = \begin{cases} \begin{pmatrix} -(1-t)x_2(t) \\ (1-t)x_1(t) \end{pmatrix} & \text{für } t \in [0,1], \\ \begin{pmatrix} 0 \\ (t-1)(u(t)-2) \end{pmatrix} & \text{für } t > 1. \end{cases}$$

(a) Zeige mittels einer Transformation auf Polarkoordinaten, dass die Lösungen des Systems für $t \in [0,1]$ auf einer Kreisbahn verlaufen.

(b) Charakterisiere die Menge $\mathcal{C}$ der steuerbaren Anfangszustände für $\mathcal{T}(t) = \{0\}$.

(c) Zeige, dass der Schnitt der Lösungstrajektorie mit der Menge $\mathcal{C}$ höchstens den Anfangszustand enthält.

Aufgabe 5
Sei $V \subseteq \mathbb{R}^n$ ein Unterraum und $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Dann gilt

$$AV \subseteq V \quad \Longleftrightarrow \quad e^{At}V \subseteq V \quad \forall\, t \geq 0.$$