Institut für Mathematik
Karl Worthmann

TECHNISCHE UNIVERSITÄT ILMENAU

Angewandte Analysis

3. Übungsserie zur Besprechung am 9.11.2018

Aufgabe 6

Das folgende lineare System beschreibt die Bewegung eines Satelliten mit der Kreisfrequenz $\omega > 0$

$$\dot{x}(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3\omega^2 & 0 & 0 & 2\omega \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2\omega & 0 & 0 \end{pmatrix} x(t) + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$$

Hierbei beschreiben die Eingänge u_1 und u_2 den Einfluss der Triebwerke auf die Satellitendynamik.

(a) Gilt $0 \in \operatorname{int} \mathcal{C}$? Und falls ja, gilt sogar $\mathcal{C} = \mathbb{R}^4$?

(b) Gelten die Aussagen von (a) auch, wenn eines der Triebwerke ausfällt, das heißt falls entweder $u_1 \equiv 0$ oder $u_2 \equiv 0$ gilt?

Aufgabe 7

Es sei $a : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ lokal integrierbar und $x : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ eine absolut stetige Funktion, welche die Differentialungleichung

$$\dot{x}(t) \le a(t)x(t), \tag{1}$$

fast überall erfüllt. Zeigen Sie, dass dann

$$x(t) \le x^0 e^{\int_0^t a(s)ds}$$

für alle $t \in [0, \infty)$ gilt.

Aufgabe 8
In der folgenden Aufgabe soll eine *energieminimale* Steuerung für das lineare System
$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \qquad x(0) = x^0,$$
mit $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ und $B \in \mathbb{R}^{m\times n}$ bestimmt werden. Hierbei relaxieren wir jedoch unsere Steuerbeschränkung, indem wir $\Omega = \mathbb{R}^n$ setzen. Es sei außerdem $\operatorname{rank}[B, AB, \ldots, A^{n-1}B] = n$ und $T > 0$. Beweisen Sie die folgenden Aussagen:

(a) Angenommen, es gilt $x^0 \in \mathcal{C}(T)$ für alle Anfangswerte x^0. Zeigen Sie, dass dann x^0 in jeden beliebigen Zustand $\hat{x}$ gesteuert werden kann, das heißt, es existieren $u \in \mathcal{U}$ und $T > 0$ mit $x(T, x^0; u) = \hat{x}$.

(b) Zeigen Sie die Invertierbarkeit der Matrix
$$Q_T := \int_0^T e^{A(T-t)} BB^\top e^{A^\top (T-t)} dt.$$

(c) Betrachten Sie nun die Steuerung $u^\dagger(t) := -B^\top e^{A^\top (T-t)} Q_T^{-1} e^{AT} x^0$. Zeigen Sie zunächst, dass $x(T, x^0; u^\dagger) = 0$ gilt. Zeigen Sie des Weiteren, dass
$$\int_0^T \|u^\dagger(t)\|_2^2 dt \leq \int_0^T \|u(t)\|_2^2 dt$$
für alle zulässigen Steuerungen $u \in \mathcal{U}[0, T]$ mit $x(T, x^0; u) = 0$ gilt, $u^\dagger$ also energieminimal ist.