In der Vorlesung hatten wir:

$$h(\vec{x}+\vec{\xi}) = h(\vec{x}) + \underbrace{J_g(f(\vec{x}))\, J_f(\vec{x})}_{=:J_h(\vec{x})}\vec{\xi} + \ldots$$

$$+ \underbrace{\boxed{J_g(f(\vec{x}))\, R_{f,\vec{x}}(\vec{\xi}) + R_{g,\vec{y}}\left(J_f(\vec{x})\vec{\xi} + R_{f,\vec{x}}(\vec{\xi})\right)}}_{=:R_{h,\vec{x}}(\vec{\xi})}$$

Um zu zeigen, dass $J_h(\vec{x})$ die $(m\times n)$-Matrix (lineare Abb.) aus der Definition der Differenzierbarkeit für $h = g\circ f$ ist, bleibt zu zeigen, dass der Restterm $R_{h,\vec{x}}$ von höherer als erster Ordnung verschwindet, also

$$\lim_{\vec{\xi}\to\vec{0},\,\vec{\xi}\neq\vec{0}} \underbrace{\frac{\|h(\vec{x}+\vec{\xi}) - (h(\vec{x}) + J_h(\vec{x})\vec{\xi})\|}{\|\vec{\xi}\|}}_{=\frac{R_{h,\vec{x}}(\vec{\xi})}{\|\vec{\xi}\|}} = 0$$

Dazu genügt es

(*1) $$\lim_{\vec{\xi}\to\vec{0},\,\vec{\xi}\neq\vec{0}} \frac{\|J_g(f(\vec{x}))\; R_{f,\vec{x}}(\vec{\xi})\|}{\|\vec{\xi}\|} = 0$$ und

(*2) $$\lim_{\vec{\xi}\to\vec{0},\,\vec{\xi}\neq\vec{0}} \frac{\|R_{g,\vec{y}}\left(J_f(\vec{x})\vec{\xi} + R_{f,\vec{x}}(\vec{\xi})\right)\|}{\|\vec{\xi}\|} = 0$$ zu zeigen.

Es gilt $\|B\vec{z}\| \leq \|B\|\,\|\vec{z}\|$, wobei $\|B\| := \sup_{\vec{z}\in\mathbb{R}^q\setminus\{0\}} \frac{\|B\vec{z}\|}{\|\vec{z}\|}$ für $B\in\mathbb{R}^{m\times q}$ (induzierte Matrixnorm)

$$= \underbrace{\max_{\vec{z}\in\mathbb{R}^q \text{ mit } \|\vec{z}\|=1} \|B\vec{z}\|}_{\in[0,\infty)}$$

Also gilt $\|J_g(f(\vec{x}))\cdot R_{f,\vec{x}}(\vec{\xi})\|$

$$\leq \|J_g(f(\vec{x}))\|\,\|R_{f,\vec{x}}(\vec{\xi})\|$$

Folglich gilt (*1) aufgrund der Definition von $R_{f,\vec{x}}(\vec{\xi})$.

Zudem gilt für alle $\vec{\xi} \in B_\varepsilon(\vec{0}) := \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n \mid \|\vec{x}\| < \varepsilon\}$, ε hinreichend klein, die Abschätzung

$$\|R_{f,\vec{x}}(\vec{\xi})\| \leq K\|\vec{\xi}\|, \qquad (\#1)$$

wobei K lediglich von f und $\vec{x}$ abhängt.

Des Weiteren gilt...

(#2) $\quad R_{g,\vec{y}}(\vec{\eta}) = \|\vec{\eta}\| \cdot \tilde{R}_{g,\vec{y}}(\vec{\eta})$ mit $\lim\limits_{\vec{\eta}\to\vec{0},\,\vec{\eta}\neq\vec{0}} \tilde{R}_{g,\vec{y}}(\vec{\eta}) = \vec{0}$

Entsprechend gilt für (*2):

$$\lim_{\vec{\xi}\to\vec{0},\,\vec{\xi}\neq\vec{0}} \underbrace{\frac{\|R_{g,\vec{y}}(J_f(\vec{x})\vec{\xi} + R_{f,\vec{x}}(\vec{\xi}))\|}{\|\vec{\xi}\|}}$$

$$\overset{(\#2)}{=} \frac{\underbrace{\|J_f(\vec{x})\vec{\xi} + R_{f,\vec{x}}(\vec{\xi})\|}\,\|\tilde{R}_{g,\vec{y}}(J_f(\vec{x})\vec{\xi} + R_{f,\vec{x}}(\vec{\xi}))\|}{\cancel{\|\vec{\xi}\|}}$$

$$\overset{(\#1)}{\leq} \|J_f(\vec{x})\|\,\|\vec{\xi}\| + K\|\vec{\xi}\|$$

$$= (\|J_f(\vec{x})\| + K)\cancel{\|\vec{\xi}\|}$$

$$= \lim_{\vec{\xi}\to\vec{0},\,\vec{\xi}\neq\vec{0}} \underbrace{(\|J_f(\vec{x})\| + K)}_{\text{unabhängig von } \vec{\xi}} \cdot \underbrace{\|\tilde{R}_{g,\vec{y}}(\underbrace{J_f(\vec{x})\vec{\xi} + R_{f,\vec{x}}(\vec{\xi})}_{\to\vec{0}})\|}_{\to 0}$$

Siehe auch O. Forster: Analysis 2, 11. Auflage, Springer Spektrum

§6. Totale Differenzierbarkeit, Satz 3