Kapitel 4

Integration

Die Integration von Funktionen ist eine elementare mathematische Operation, die in vielen Formeln benötigt wird. Im Gegensatz zur Ableitung, die für praktisch alle mathematischen Funktionen explizit analytisch berechnet werden kann, gibt es viele Funktionen, deren Integrale man nicht explizit angeben kann. Verfahren zur numerischen Integration (man spricht auch von *Quadratur*) spielen daher eine wichtige Rolle, sowohl als eigenständige Algorithmen als auch als Basis für andere Anwendungen wie z.B. der numerischen Lösung von Differentialgleichungen.

Das Grundproblem lässt sich hierbei ganz einfach beschreiben: Für eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ soll das Integral

$$\int_a^b f(x)dx \tag{4.1}$$

auf einem Intervall $[a, b]$ berechnet werden. Einige Verfahren werden auch auf unendliche Integrationsintervalle anwendbar sein.

Wir werden hier verschiedene Verfahren zur Integration kennen lernen: Die klassischen *Newton-Cotes-Formeln* und *zusammengesetzten Newton-Cotes-Formeln* (auch als *iterierte* oder *aufsummierte* Newton-Cotes-Formeln bekannt), welche auf der Polynominterpolation basieren. Zudem wird die *Gauss-Quadratur*, die auf orthogonalen Polynomen beruht, kurz angesprochen.

4.1 Newton-Cotes-Formeln

Die Grundidee jeder numerischen Integrationsformel liegt darin, das Integral (4.1) durch eine Summe

$$\int_a^b f(x)dx \approx (b-a)\sum_{i=0}^{n} \alpha_i f(x_i) \tag{4.2}$$

zu approximieren. Hierbei heißen die x_i die *Stützstellen* und die α_i die *Gewichte* der Integrationsformel.

Die Stützstellen x_i können hierbei beliebig vorgegeben werden, folglich benötigen wir eine Formel, mit der wir zu den x_i sinnvolle Gewichte α_i berechnen können.

Die Idee der Newton-Cotes-Formeln liegt nun darin, die Funktion f zunächst durch ein Interpolationspolynom $P \in \mathcal{P}_n$ zu den Stützstellen $x_0, \dots, x_n$ zu approximieren und dann das *exakte* Integral über dieses Polynom zu berechnen. Wir führen diese Konstruktion nun durch:

Da wir einen expliziten Ausdruck in den $f(x_i)$ erhalten wollen, bietet sich die Darstellung von P mittels der Lagrange-Polynome an, also

$$P(x) = \sum_{i=0}^{n} f(x_i) L_i(x) \quad \text{mit} \quad L_i(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j},$$

vgl. Abschnitt 3.1.1. Das Integral über P ergibt sich dann zu

$$\begin{aligned} \int_a^b P(x)dx &= \int_a^b \sum_{i=0}^{n} f(x_i) L_i(x)\, dx \\ &= \sum_{i=0}^{n} f(x_i) \int_a^b L_i(x)\, dx. \end{aligned}$$

Um die Gewichte α_i in (4.2) zu berechnen, setzen wir

$$(b-a) \sum_{i=0}^{n} \alpha_i f(x_i) = \sum_{i=0}^{n} f(x_i) \int_a^b L_i(x) dx.$$

Gleichsetzen der der einzelnen Summanden und Auflösen nach α_i liefert dann

$$\alpha_i = \frac{1}{b-a} \int_a^b L_i(x) dx. \tag{4.3}$$

Diese α_i können dann explizit berechnet werden, denn die Integrale über die Lagrange-Polynome L_i sind explizit lösbar. Hierbei hängen die Gewichte α_i von der Wahl der Stützstellen x_i ab, nicht aber von den Funktionswerten $f(x_i)$. Für äquidistante Stützstellen

$$x_i = a + \frac{i(b-a)}{n}$$

sind die Gewichte aus (4.3) in Tabelle 4.1 für $n = 0, \dots, 7$ angegeben.

Beachte, dass sich die Gewichte immer zu 1 aufsummieren und symmetrisch in i sind, d.h. es gilt $\alpha_i = \alpha_{n-i}$. Außerdem sind die Gewichte unabhängig von den Intervallgrenzen a und b. Einige dieser Formeln haben eigene Namen. So wird z.B. die Newton-Cotes-Formel für $n = 0$ als *Rechteck-Regel*, für $n = 1$ als *Trapez-Regel*, für $n = 2$ als *Simpson-Regel* oder *Keplersche Fass-Regel*, und die Formel für $n = 3$ als *Newtonsche* 3/8-*Regel* bezeichnet.

Aus der Abschätzung des Interpolationsfehlers kann man nun eine Abschätzung für den Integrationsfehler

$$F_n[f] := \int_a^b f(x)dx - (b-a) \sum_{i=0}^{n} \alpha_i f(x_i) = \int_a^b f(x)dx - \int_a^b P(x)dx$$

ableiten. Hierbei müssen die Stützstellen x_i nicht unbedingt äquidistant liegen.

n	α_0	α_1	α_2	α_3	α_4	α_5	α_6	α_7
0	1							
1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$						
2	$\frac{1}{6}$	$\frac{4}{6}$	$\frac{1}{6}$					
3	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$				
4	$\frac{7}{90}$	$\frac{32}{90}$	$\frac{12}{90}$	$\frac{32}{90}$	$\frac{7}{90}$			
5	$\frac{19}{288}$	$\frac{75}{288}$	$\frac{50}{288}$	$\frac{50}{288}$	$\frac{75}{288}$	$\frac{19}{288}$		
6	$\frac{41}{840}$	$\frac{216}{840}$	$\frac{27}{840}$	$\frac{272}{840}$	$\frac{27}{840}$	$\frac{216}{840}$	$\frac{41}{840}$	
7	$\frac{751}{17280}$	$\frac{3577}{17280}$	$\frac{1323}{17280}$	$\frac{2989}{17280}$	$\frac{2989}{17280}$	$\frac{1323}{17280}$	$\frac{3577}{17280}$	$\frac{751}{17280}$

Tabelle 4.1: Gewichte der Newton-Cotes Formeln aus (4.3) für äquidistante Stützstellen x_i

Satz 4.1 Seien $n \geq 1$ und α_i die Gewichte, die gemäß (4.3) zu den Stützstellen $a \leq x_0 < \ldots < x_n \leq b$ berechnet wurden, sei $h := (b-a)/n$ und $z_i := n(x_i - a)/(b-a) \in [0, n]$ für $i = 0, \ldots, n$. Dann gilt:

(i) Es gibt nur von $z_0, \ldots, z_n$ und n abhängende Konstanten c_n, so dass für alle $f \in C^{n+1}([a,b])$ die Abschätzung

$$|F_n[f]| \leq c_n h^{n+2} \|f^{(n+1)}\|_\infty$$

gilt.

(ii) Für gerades n, $f \in C^{n+2}([a,b])$ und symmetrisch verteilte Stützstellen x_i, also $x_i - a = b - x_{n-i}$ für $i = 0, \ldots, n$ (z.B. äquidistante Stützstellen) gibt es nur von $z_0, \ldots, z_n$ und n abhängende Konstanten d_n, so dass die Abschätzung

$$|F_n[f]| \leq d_n h^{n+3} \|f^{(n+2)}\|_\infty$$

gilt.

Beweis: (i) Aus Satz 3.7(ii) wissen wir

$$|f(x) - P(x)| \leq \left\| f^{(n+1)} \right\|_\infty \left| \frac{(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_n)}{(n+1)!} \right| = \frac{1}{(n+1)!} \left\| f^{(n+1)} \right\|_\infty \prod_{i=0}^{n} |x - x_i|.$$

Also folgt

$$|F_n[f]| \quad \leq \quad \frac{1}{(n+1)!} \left\| f^{(n+1)} \right\|_\infty \int_a^b \prod_{i=0}^{n} |x - x_i| \, dx,$$

Daraus folgt die behauptete Abschätzung mit

$$\begin{aligned} c_n \quad &= \quad \frac{1}{(n+1)!} \frac{1}{h^{n+2}} \int_a^b \prod_{i=0}^{n} |x - x_i| \, dx \quad = \quad \frac{1}{(n+1)!} \left(\frac{n}{b-a} \right)^{n+2} \int_a^b \prod_{i=0}^{n} |x - x_i| \, dx \\ \Big(\text{Substitution: } z = n\tfrac{x-a}{b-a},\ \ z_i = n\tfrac{x_i - a}{b-a}\Big) \quad &= \quad \frac{1}{(n+1)!} \int_0^n \prod_{i=0}^{n} |z - z_i| \, dz \end{aligned}$$

Beachte, dass die z_i im Intervall $[0,n]$ liegen, der entstehende Ausdruck also unabhängig von a und b ist.

(ii) Aus der Konstruktion der Newton-Cotes-Formeln folgt sofort, dass Polynome $Q \in \mathcal{P}_n$ exakt integriert werden, da das interpolierende Polynom $P \in \mathcal{P}_n$, über das integriert wird, in diesem Fall mit Q übereinstimmt. Der Beweis von (ii) folgt aus der — auf den ersten Blick etwas überraschenden — Eigenschaft, dass die Newton-Cotes-Formeln für gerades n und symmetrisch verteilte Stützstellen x_i auch für Polynome $Q \in \mathcal{P}_{n+1}$ exakt sind. Zum Beweis dieser Eigenschaft sei $Q \in \mathcal{P}_{n+1}$ und $P \in \mathcal{P}_n$ das interpolierende Polynom an den Stützstellen x_i. Dann existert nach Satz 3.7(i) für jedes $x \in [a,b]$ eine Stelle $\xi \in [a,b]$, so dass

$$Q(x) = P(x) + \underbrace{\frac{Q^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}}_{=:\gamma}(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_n)$$

gilt. Weil nun aber $Q^{(n+1)}$ ein Polynom vom Grad 0 und damit konstant ist, ist γ unabhängig von ξ und damit auch von x. Folglich gilt

$$F_n[Q] = \int_a^b Q(x)dx - \int_a^b P(x)dx = \gamma \int_a^b \prod_{i=0}^n (x-x_i)dx.$$

Aus der Symmetrie der x_i folgt $x - x_i = x - (-x_{n-i} + a + b)$ für $x \in [a,b]$ und damit

$$\begin{aligned} \int_a^{(a+b)/2} \prod_{i=0}^n (x-x_i)dx &= \int_a^{(a+b)/2} \prod_{i=0}^n (x-(-x_i+a+b))dx \\ \Big(\text{Substitution: } x = -(x-a-b)\Big) \quad &= -\int_b^{(a+b)/2} \prod_{i=0}^n (-x+x_i)dx \\ &= -\int_{(a+b)/2}^b \prod_{i=0}^n (x-x_i)dx, \end{aligned}$$

also

$$\int_a^b \prod_{i=0}^n (x-x_i)dx = 0$$

und damit $F_n[Q] = 0$, weswegen Q exakt integriert wird. Zum Beweis der Abschätzung (ii) sei nun f aus der Behauptung gegeben. Sei $Q \in \mathcal{P}_{n+1}$ ein Interpolationspolynom zu den Stützstellen $x_0, x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}$, wobei x_{n+1} eine von $x_0, \ldots, x_n$ verschiedene und ansonsten beliebige weitere Stützstelle im Intervall $[x_0, x_n]$ ist. Dann stimmen die Interpolationspolynome $P \in \mathcal{P}_n$ für f und Q zu den Stützstellen $x_0, \ldots, x_n$ überein und es gilt nach Satz 3.7(ii) (also analog zu Teil (i) dieses Beweises mit $n+1$ an Stelle von n) und der oben bewiesenen Tatsache $F_N[Q] = 0$

$$\begin{aligned} |F_n[f]| &= \left| \int_a^b f(x)dx - \int_a^b P(x)dx \right| \\ &= \left| \int_a^b f(x)dx - \int_a^b Q(x)dx + \underbrace{\int_a^b Q(x)dx - \int_a^b P(x)dx}_{=F_n[Q]=0} \right| \\ &= \left| \int_a^b f(x)dx - \int_a^b Q(x)dx \right| \\ &\le \frac{1}{(n+2)!} \left\| f^{(n+2)} \right\|_\infty \int_a^b |x-x_{n+1}| \prod_{i=0}^n |x-x_i| dx. \end{aligned}$$

Da die rechte Seite dieser Ungleichung stetig in x_{n+1} und die linke Seite unabhängig von x_{n+1} ist, gilt die Abschätzung auch für $x_{n+1} = x_{n/2}$. Daher kann dieser Integralausdruck nun analog zu Teil (i) durch

$$\frac{1}{(n+2)!} \|f^{(n+2)}\|_\infty \int_a^b |x - x_{n/2}| \prod_{i=0}^n |x-x_i| dx \le d_n h^{n+3} \|f^{(n+2)}\|_\infty$$

mit

$$d_n = \frac{1}{(n+2)!} \int_0^n |z - z_{n/2}| \prod_{i=0}^{n} |z - z_i| dz$$

abgeschätzt werden. □

Beachte, dass Formulierung und Beweis des Satzes wegen der Division durch n nur für $n \geq 1$ sinnvoll sind, man kann aber ähnliche Abschätzungen auch für $n = 0$ erhalten.

Die Konstanten c_n und d_n hängen von n und der Lage der "skalierten" Stützstellen z_i ab und können für gegebene Werte explizit berechnet werden. Wir zeigen diese Rechnung für $n = 1$ und die Stützstellen $x_0 = a$, $x_1 = b$. In diesem Fall erhalten wir $z_0 = 0$ und $z_1 = 1$. Damit ergibt sich

$$\begin{aligned} c_1 &= \frac{1}{(1+1)!} \int_0^1 \prod_{i=0}^{1} |z - z_i|\, dz = \frac{1}{2} \int_0^1 (z-0)(1-z) dz = \frac{1}{2} \int_0^1 z - z^2 dz \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2} z^2 - \frac{1}{3} z^3 \right]_0^1 = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) = \frac{1}{12}. \end{aligned}$$

In Tabelle 4.2 sind die mit dieser Technik berechneten Fehlerabschätzungen für $n = 1, \ldots, 7$ und äquidistante Stützstellen approximativ angegeben, wobei $M_n := \|f^{(n)}\|_\infty$ ist.

n	1	2	3	4	5	6	7
	$\frac{(b-a)^3 M_2}{12}$	$\frac{(b-a)^5 M_4}{2880}$	$\frac{(b-a)^5 M_4}{6480}$	$\frac{5.2(b-a)^7 M_6}{10^7}$	$\frac{2.9(b-a)^7 M_6}{10^7}$	$\frac{6.4(b-a)^9 M_8}{10^{10}}$	$\frac{3.9(b-a)^9 M_8}{10^{10}}$

Tabelle 4.2: Fehlerabschätzungen der Newton-Cotes Formeln für äquidistante Stützstellen

Beachte, dass die Formeln mit ungeradem $n = 2m+1$ jeweils nur eine leichte Verbesserung gegenüber den Formeln mit geradem $n = 2m$ liefern, dafür aber eine Funktionsauswertung mehr ausgeführt werden muss. Formeln mit geradzahligem n sind also vorzuziehen.

Wie zu erwarten erhöht sich die Genauigkeit mit wachsendem n, allerdings nur dann, wenn nicht zugleich mit wachsendem n die Norm der Ableitungen $\|f^{(n)}\|_\infty$ zunimmt. Es tauchen also die gleichen prinzipiellen Probleme wie bei den Interpolationspolynomen auf, was nicht weiter verwunderlich ist, da diese ja dem Verfahren zu Grunde liegen. Hier kommt aber noch ein weiteres Problem hinzu, nämlich kann man für $n = 8$ und $n \geq 10$ beobachten, dass einige der Gewichte α_i negativ werden. Dies kann zu numerischen Problemen (z.B. Auslöschungen) führen, die man vermeiden möchte. Aus diesem Grunde ist es nicht ratsam, den Grad des zugrundeliegenden Polynoms immer weiter zu erhöhen. Trotzdem sind die Newton-Cotes-Formel wichtig, da sie die Basis für eine ganze Reihe effizienterer Integrationsformeln liefern, die wir in den folgenden Abschnitten besprechen werden.

4.2 Zusammengesetzte Newton-Cotes-Formeln

Ein möglicher Ausweg aus den Problemen mit immer höheren Polynomgraden funktioniert bei der Integration mittels Newton-Cotes-Formeln ganz ähnlich wie bei der Interpolation

— nur einfacher. Bei der Interpolation sind wir von Polynomen zu Splines, also stückweisen Polynomen übergegangen. Um dort weiterhin eine "schöne" Approximation zu erhalten, mussten wir Bedingungen an den Nahtstellen festlegen, die eine gewisse Glattheit der approximierenden Funktion erzwingen, weswegen wir die Koeffizienten recht aufwändig über ein lineares Gleichungssystem herleiten mussten.

Bei der Integration fällt diese Prozedur weg. Wie bei den Splines verwenden wir zur Herleitung der zusammengesetzten Newton-Cotes-Formeln stückweise Polynome, verzichten aber auf aufwändige Bedingungen an den Nahtstellen, da wir ja nicht an einer schönen Approximation der Funktion, sondern "nur" an einer guten Approximation des Integrals interessiert sind. In der Praxis berechnet man die zugrundeliegenden stückweisen Polynome nicht wirklich, sondern wendet die Newton-Cotes-Formeln wie folgt auf den Teilintervallen an:

Sei N die Anzahl von Teilintervallen, auf denen jeweils die Newton-Cotes-Formel vom Grad n, also mit $n+1$ Stützstellen verwendet werden soll. Wir setzen

$$x_i = a + ih, \;\; i = 0, 1, \ldots, nN, \quad h = \frac{b-a}{nN}$$

und zerlegen das Integral (4.1) mittels

$$\int_a^b f(x)dx \;=\; \int_{x_0}^{x_n} f(x)dx + \int_{x_n}^{x_{2n}} f(x)dx + \cdots + \int_{x_{(N-1)n}}^{x_{Nn}} f(x)dx = \sum_{k=1}^{N} \int_{x_{(k-1)n}}^{x_{kn}} f(x)dx.$$

Auf jedem Teilintervall $[x_{(k-1)n}, x_{kn}]$ wenden wir nun die Newton-Cotes-Formel an, d.h. wir approximieren

$$\int_{x_{(k-1)n}}^{x_{kn}} f(x)dx \;\approx\; nh \sum_{i=0}^{n} \alpha_i f(x_{(k-1)n+i})$$

und addieren die Teilapproximationen auf, also

$$\int_a^b f(x)dx \;\approx\; nh \sum_{k=1}^{N} \sum_{i=0}^{n} \alpha_i f(x_{(k-1)n+i}).$$

Der entstehende Integrationsfehler

$$F_{N,n}[f] := \int_a^b f(x)dx - nh \sum_{k=1}^{N} \sum_{i=0}^{n} \alpha_i f(x_{(k-1)n+i})$$

ergibt sich einfach als Summe der Fehler $F_n[f]$ auf den Teilintervallen, weswegen man aus Satz 4.1(i) die Abschätzung

$$\begin{aligned} |F_{N,n}[f]| \;&\leq\; \sum_{k=1}^{N} c_n h^{n+2} \max_{y \in [x_{(k-1)n}, x_{kn}]} |f^{(n+1)}(y)| \\ &\leq\; N c_n h^{n+2} \|f^{(n+1)}\|_\infty \;=\; \frac{c_n}{n}(b-a)h^{n+1}\|f^{(n+1)}\|_\infty \end{aligned}$$

und aus Satz 4.1(ii) für gerades n die Abschätzung

$$|F_{N,n}[f]| \leq \frac{d_n}{n}(b-a)h^{n+2}\|f^{(n+2)}\|_\infty$$

erhält. Im Folgenden geben wir die zusammengesetzten Newton-Cotes-Formeln für $n = 1, 2, 4$ mitsamt ihren Fehlerabschätzungen an; in allen Formeln sind die Stützstellen x_i als $x_i = a + ih$ gewählt.

$n = 1$**, Trapez-Regel:**

$$\int_a^b f(x)dx \;\approx\; \frac{h}{2}\left(f(a) + 2\sum_{i=1}^{N-1} f(x_i) + f(b)\right)$$

$$|F_{N,1}[f]| \le \frac{b-a}{12} h^2 \|f^{(2)}\|_\infty, \quad h = \frac{b-a}{N}$$

$n = 2$**, Simpson-Regel:**

$$\int_a^b f(x)dx \;\approx\; \frac{h}{3}\left(f(a) + 2\sum_{i=1}^{N-1} f(x_{2i}) + 4\sum_{i=0}^{N-1} f(x_{2i+1}) + f(b)\right)$$

$$|F_{N,2}[f]| \le \frac{b-a}{180} h^4 \|f^{(4)}\|_\infty, \quad h = \frac{b-a}{2N}$$

$n = 4$**, Milne-Regel:**

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)dx \;\approx\; & \frac{2h}{45}\Bigg(7\Big(f(a) + f(b)\Big) + 14\sum_{i=1}^{N-1} f(x_{4i}) \\ & +\; 32\sum_{i=0}^{N-1}\Big(f(x_{4i+1}) + f(x_{4i+3})\Big) + 12\sum_{i=0}^{N-1} f(x_{4i+2})\Bigg)\end{aligned}$$

$$|F_{N,4}[f]| \le \frac{2(b-a)}{945} h^6 \|f^{(6)}\|_\infty, \quad h = \frac{b-a}{4N}$$

An einem Beispiel wollen wir die praktischen Auswirkungen der Fehlerabschätzungen illustrieren.

Beispiel 4.2 Das Integral

$$\int_0^1 e^{-x^2/2} dx$$

soll mit einer garantierten Genauigkeit von $\varepsilon = 10^{-10}$ numerisch approximiert werden. Die Ableitungen der Funktion $f(x) = e^{-x^2/2}$ lassen sich relativ leicht berechnen; es gilt

$$f^{(2)}(x) = (x^2-1)f(x), \;\; f^{(4)}(x) = (3-6x^2+x^4)f(x), \;\; f^{(6)}(x) = (-15+45x^2-15x^4+x^6)f(x).$$

Mit etwas Rechnung (oder aus der grafischen Darstellung) sieht man, dass all diese Funktionen ihr betragsmäßiges Maximum auf $[0, 1]$ in $y = 0$ annehmen, woraus die Gleichungen

$$\|f^{(2)}\|_\infty = 1, \;\; \|f^{(4)}\|_\infty = 3 \quad \text{und } \|f^{(6)}\|_\infty = 15$$

folgen.

Löst man die oben angegebenen Fehlerabschätzungen $F_{N,n}[f] \leq \varepsilon$ für die Trapez-, Simpson- und Milne-Regel nach h auf so erhält man die folgenden Bedingungen an h

$$
\begin{aligned}
h &\leq \sqrt{\frac{12\varepsilon}{(b-a)\|f^{(2)}\|_\infty}} &\approx \frac{1}{28867.51} \qquad &\text{(Trapez-Regel)}\\
h &\leq \sqrt[4]{\frac{180\varepsilon}{(b-a)\|f^{(4)}\|_\infty}} &\approx \frac{1}{113.62} \qquad &\text{(Simpson-Regel)}\\
h &\leq \sqrt[6]{\frac{945\varepsilon}{2(b-a)\|f^{(6)}\|_\infty}} &\approx \frac{1}{26.12} \qquad &\text{(Milne-Regel)}
\end{aligned}
$$

Der Bruch auf der rechten Seite gibt dabei die maximal erlaubte Größe für h vor. Um diese zu realisieren, muss $1/(nN) \leq h$ gelten für die Anzahl $nN+1$ der Stützstellen. Da nN ganzzahliges Vielfaches von n ist, braucht man also 28869 Stützstellen für die Trapez-Regel, 115 Stützstellen für die Simpson-Regel und 29 Stützstellen für die Milne-Regel. □

Bisher wurden zu beliebig vorgegebenen Stützstellen geeignete Gewichte gesucht. Analog zur Interpolation kann man aber auch in der numerischen Integration versuchen, die Stützstellen geeignet zu platzieren, um den numerischen Fehler zu verringern. In einer Newton-Cotes-Formel von Grad n gibt es $n+1$ Stützstellen und $n+1$ Gewichte, also $2n+2$ freie Parameter. In der sogenannten *Gauß-Quadratur* werden diese Parameter so gewählt, dass Polynome möglichst hohen Grades exakt integriert werden. Die Newton-Cotes Formeln sind so konstruiert, dass die Formel vom Grad n für beliebige Stützstellen Polynome von Grad n exakt integriert, für symmetrische Stützstellen und gerades n werden sogar Polynome vom Grad $n+1$ exakt integriert. Wenn man “naiv” mit der Dimension der Räume und der Anzahl der freien Parameter argumentiert, könnte man vermuten, dass bei geschickter Wahl der Stützstellen und Gewichte Polynome vom Grad $2n+1$ exakt integriert werden können, da dann die Dimension $2n+2$ des Polynomraums $\mathcal{P}_{2n+1}$ gerade mit der Anzahl der freien Parameter übereinstimmt; das dies tatsächlich stimmt, ist beispielsweise in [3, Satz 5.3] gezeigt - sogar für die allgemeinere Aufgabenstellung, den Ausdruck $\int_a^b \omega(x) f(x)\, dx$ mit einer Gewichtsfunktion $\omega(\cdot)$ zu approximieren. Für $\omega \equiv 1$ und Integrationsintervall $[-1,1]$ erhält man die *Gauß-Legendre-Regel*, die man analog den Newton-Cotes-Formeln zusammensetzen kann. Für $\omega = 1/\sqrt{1-x^2}$ führt dies auf $[-1,1]$ auf die Tschebyscheff-Polynome — diese kann jedoch wegen der Singularitäten der Gewichtsfunktion am Rand des Integrationsgebiets nicht zusammengesetzt werden. Der Hauptnutzen der Gauß-Quadratur besteht darin, Integrale mit vorgegebenen Gewichtsfunktionen bzw. auf unendlichen Zeithorizont ($w(x) = e^{-x}$ bzw. $w(x) = e^{-x^2}$) berechnen zu können. Ansonsten ist die sogenannte *Romberg-Extrapolation* häufig effizienter.