Jun.-Prof. Dr. K. Worthmann
Mathematisches Institut
Technische Universität Ilmenau

TECHNISCHE UNIVERSITÄT ILMENAU

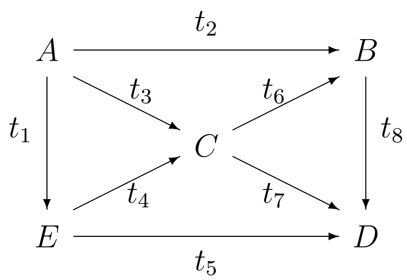
Sommersemester 2014

Numerik für Informatiker
2.Übungsblatt

Aufgabe 5

Eine Produktionsstätte sei nach dem unten dargestellten Schema organisiert. Die Pfeile t_1 bis t_8 stellen fabrikinterne Wege dar. Güter, welche an Punkt A hergestellt werden, sollen nach B bzw. D transportiert werden, wobei in B N Einheiten und in D die restlichen M Einheiten weiterverarbeitet werden. Die Punkte C und E seien reine Durchgangsstellen. Aus Effizienzgründen soll auf dem Transportweg t_1 eine doppelt so große Anzahl Güter wie auf t_2 befördert werden. Außerdem sollen sich auf t_8 stets ebensoviele Güter bewegen wie auf t_5 und t_7 zusammen.

Welches lineare Gleichungssystem in der Form $Ax = b$ (Matrixschreibweise) ist zu lösen, damit in Punkt C eine Qualitätskontrolle aufgebaut werden kann, die von der Hälfte der Gesamtproduktion durchlaufen wird?



Aufgabe 6

Gegeben sei ein dezimales Zahlenformat mit Mantissenlänge 5. Wenn man die Funktion

$$g(x) = \frac{1 - \cos(x)}{x}$$

für $x = 0.001$ (bzw. in der Nähe der 0) berechnet, so tritt Auslöschung auf (0 statt $0.5 \cdot 10^{-3}$). Finden Sie eine Darstellung, die diesen Effekt vermeidet und begründen Sie dies.

Hinweis: Warum liefert $\frac{x}{2}$ eine sehr gute Näherung?

Aufgabe 7

Gegeben sei die dünn besetzte Matrix

$$A = \begin{pmatrix} * & * & * & * & * \\ * & * & 0 & 0 & 0 \\ * & 0 & * & 0 & 0 \\ * & 0 & 0 & * & 0 \\ * & 0 & 0 & 0 & * \end{pmatrix},$$

wobei ein $*$ ein Element $\neq 0$ bezeichnet.

1. Zeigen Sie: Bei der Gauß-Elimination werden im ersten Hauptschritt (Elimination der Elemente in den Positionen $(2,1)$, $(3,1)$, $(4,1)$ und $(5,1)$) in A alle ursprünglichen Nullen zerstört.

2. Finden Sie Permutationsmatrizen P_1 und P_2 so, dass bei Anwendung der Gauß-Elimination auf P_1AP_2 alle vorhandenen Nullen erhalten bleiben.

Aufgabe 8

a) Bestimmen Sie über die LR-Zerlegung eine Lösung für das folgende lineare Gleichungssystem:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 10 & -7 & 0 \\ -3 & 2 & 6 \\ 5 & -1 & 5 \end{pmatrix}}_{=:A} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

b) Nutzen Sie die LR-Zerlegung zur ökonomischen Berechnung der Determinante von A.

Aufgabe 9

Um auf numerischem Wege die Ableitung einer Funktion $f(x)$ an einem bestimmten Punkt zu approximieren, kann man den Differenzenquotienten

$$f'(x) \approx \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \tag{1}$$

mit geeignet kleiner Schrittweite h auswerten.
Das kleine Programm `float.cpp` (kann auf der eLearning-Seite runtergeladen werden) berechnet genau diesen Differenzenquotienten (1) am Beispiel der Funktion $f(x) = x^2$ im Punkt $x = 1$ mit Schrittweite $h = 10^{-1}$.

1. Die Ausgabe des Programms stimmt natürlich nicht mit dem exakten Wert für $f'(1)$ überein. Aus der Analysis ist bekannt, dass

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \tag{2}$$

gilt. Was beobachten Sie, wenn Sie das Programm mit den unterschiedlichen Schrittweiten $h \in \{10^{-i} \mid i = 1, \ldots, 7\}$ starten? Inwiefern deckt sich diese Beobachtung mit der theoretischen Gleichung (2)?

2. Bei zu kleiner Schrittweite $h \in \{10^{-i} \mid i \geq 8\}$ gibt das Programm immer Null aus. Zeigen Sie rechnerisch, warum gerade die Addition (bzw. Subtraktion) zweier Gleitkommazahlen, die sich betragsmäßig stark unterscheiden, Probleme verursachen kann. Verwenden Sie hierfür die Darstellung aus der Vorlesung

$$x = m \cdot B^e$$

Warum trifft dies für die Multiplikation (bzw. Division) **nicht** zu?

3. Ersetzen Sie im Programmcode `float.cpp` die Variablentypen `float` durch `double`. Was beobachten Sie nun? (kurze Begründung)