

## Numerik für Informatiker

### 3. Übungsblatt

#### Aufgabe 10

Sei  $T$  eine lineare Abbildung von  $\mathbb{R}^n$  in den  $\mathbb{R}^n$  mit der Vektornorm  $\|\cdot\|$ . Es sei

$$\|T\| := \sup_{x \neq 0} \frac{\|Tx\|}{\|x\|} = \max_{\|x\|=1} \|Tx\|.$$

Zeigen Sie:

- (a) Die Matrixnorm  $\|\cdot\|$  definiert auf dem Vektorraum der linearen Abbildungen  $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$  von  $\mathbb{R}^n$  in den  $\mathbb{R}^n$  eine Norm.
- (b) Die Matrixnorm  $\|\cdot\|$  ist verträglich mit der Vektornorm  $\|\cdot\|$ , d.h.

$$\|Tx\| \leq \|T\| \|x\| \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}^n, T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n).$$

- (c) Die Matrixnorm  $\|\cdot\|$  ist submultiplikativ, d.h. für  $T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ ,  $S \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$  gilt:

$$\|ST\| \leq \|S\| \|T\|.$$

- (d) Sei  $\|\cdot\|$  eine weitere Norm auf  $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ , für die  $\|Tx\| \leq \|T\| \|x\|$  gilt. Dann ist

$$\|T\| \leq \|T\|.$$

#### Aufgabe 11

Beweisen Sie für eine reguläre Matrix  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  die Gleichung

$$\text{cond}_2(A^T A) = (\text{cond}_2(A))^2.$$

Dabei sei  $\text{cond}_2$  die Konditionszahl bezüglich der Spektralnorm.

**Hinweis:**  $\lambda$  EW von  $AA^T \iff \lambda$  EW von  $A^T A$ .

### Aufgabe 12

Gegeben sei das lineare Gleichungssystem  $Ax = b$  mit

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 0.99 \\ 0.99 & 0.98 \end{pmatrix}, \quad b := \begin{pmatrix} 1.99 \\ 1.97 \end{pmatrix}$$

sowie eine gestörte rechte Seite

$$b + \Delta b := \begin{pmatrix} 1.989903 \\ 1.970106 \end{pmatrix}.$$

a) Berechnen Sie die Lösungen  $x$  bzw.  $x + \Delta x$  von  $Ax = b$  bzw.  $A(x + \Delta x) = b + \Delta b$ .

b) Geben Sie die relativen Fehler

$$\frac{\|\Delta x\|_\infty}{\|x\|_\infty}, \quad \frac{\|\Delta b\|_\infty}{\|b\|_\infty}$$

und  $\text{cond}_\infty(A) := \|A\|_\infty \|A^{-1}\|_\infty$  an.

c) Vergleichen Sie Ihre Resultate mit der Abschätzung

$$\frac{\|\Delta x\|_\infty}{\|x\|_\infty} \leq \text{cond}_\infty(A) \frac{\|\Delta b\|_\infty}{\|b\|_\infty}.$$

### Aufgabe 13

Gegeben sei das Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} 0.001 & -2.3 \\ -1.35 & 0.03 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2.295 \\ -6.72 \end{pmatrix}.$$

Die exakte Lösung ist  $x_1 = 5$ ,  $x_2 = 1$ .

Ihnen sollen bei der Rechnung drei signifikante Stellen zur Verfügung stehen, d.h. jede Zahl wird dargestellt in der Exponentialschreibweise

$$\pm 0.x_1x_2x_3 \cdot 10^e \quad (x_1, x_2, x_3 \in \{0, 1, \dots, 9\}, x_1 \neq 0, e \in \mathbb{Z}).$$

Sollte bei Rechenoperationen das Ergebnis mehr Dezimalstellen benötigen, muss das Ergebnis durch Rundung auf die angegebene Form gebracht werden (z. B.  $12.345 \Rightarrow 0.123 \cdot 10^2$ ). Berechnen Sie die Lösung durch das GAUSS-Verfahren

1. ohne Pivotsuche,
2. mit Spaltenpivotsuche.

Zeigt sich ein Unterschied?