Jun.-Prof. Dr. K. Worthmann
Mathematisches Institut
Technische Universität Ilmenau

TECHNISCHE UNIVERSITÄT ILMENAU

Sommersemester 2014

Numerik für Informatiker
4.Übungsblatt

Aufgabe 14

Die quadratintegrierbare Funktion $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ soll durch ein Polynom $\sum_{j=1}^{n} x_j \, t^{j-1}$ so approximiert werden, dass die Abweichung

$$\int_0^1 \left[f(t) - \sum_{j=1}^{n} x_j \, t^{j-1} \right]^2 dt$$

minimal ausfällt. Berechnen Sie den Gradienten $\nabla g(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ der Funktion

$$g(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \int_0^1 \left[f(t) - \sum_{j=1}^{n} x_j \, t^{j-1} \right]^2 dt$$

und stellen Sie damit für $f \equiv 1$ das lineare Gleichungssystem auf

$$\nabla g(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0_{\mathbb{R}^n}.$$

Aufgabe 15

Für $v \in \mathbb{R}^n$ mit $v^\top v = 2$ sei die Householdermatrix $H_v := I - vv^\top$ definiert.

(a) Man berechne die Eigenwerte und Eigenvektoren von H_v. Wie ist die Abbildung

$$\begin{array}{rccc} H_{[v]}: & \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R}^n, \\ & x & \longmapsto & H_v x \end{array}$$

zu interpretieren? Zeigen Sie Ihre Aussage durch Rechnung (Eigenwerte und -vektoren benutzen!) und für den Fall $n = 2$ durch eine Skizze.

(b) Man bestimme für $x = (1, -4, -8)^T \in \mathbb{R}^3$ ein $k \in \mathbb{R}$ und ein $v \in \mathbb{R}^3$, so dass

$$v^\top v = 2 \quad \text{und} \quad H_v x = k e_1,$$

wobei $e_1 := (1, 0, 0)^\top \in \mathbb{R}^3$.