Jun.-Prof. Dr. K. Worthmann
Mathematisches Institut
Technische Universität Ilmenau

Sommersemester 2014

Numerik für Informatiker
6.Übungsblatt

Aufgabe 18

Man bestimme die Eigenwerte $\lambda_i(\varepsilon)$ und die zugehörigen Eigenvektoren $x_i(\varepsilon)$ der Matrix

$$A_\varepsilon := \begin{pmatrix} 1+\varepsilon\cos\left(\frac{2}{\varepsilon}\right) & -\varepsilon\sin\left(\frac{2}{\varepsilon}\right) \\ -\varepsilon\sin\left(\frac{2}{\varepsilon}\right) & 1-\varepsilon\cos\left(\frac{2}{\varepsilon}\right) \end{pmatrix}.$$

Wie verhalten sich die Matrix $A(\varepsilon)$, die Eigenwerte $\lambda_i(\varepsilon)$ und $\frac{x_i(\varepsilon)}{\|x_i(\varepsilon)\|}$ (d.h. im Wesentlichen die Richtung der Eigenvektoren) für $\varepsilon \searrow 0$?

Aufgabe 19

Das von Mises-Verfahren (direkte Vektoriteration) zur Bestimmung des betragsdominanten Eigenwertes einer reellen $(n \times n)$-Matrix A berechnet – soweit möglich – die Folge von Vektoren

$$x^{(k+1)} := \frac{Ax^{(k)}}{\|Ax^{(k)}\|_2} \quad (k = 0, 1, \dots)$$

ausgehend von einem Startvektor $x^{(0)} \in \mathbb{R}^n$.

a) Berechnen Sie – sofern möglich – die ersten zehn Iterierten ausgehend von der Startnäherung $x^{(0)} = (1, 1, 1)^T$ und die Näherungen

$$\frac{(Ax^{(k)})_i}{x_i^{(k)}} \quad (i = 1, 2, 3)$$

für den betragsgrößten Eigenwert λ der Matrix

$$A := \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 1 & 6 & -2 \\ 1 & -2 & 10 \end{pmatrix}.$$

b) Berechnen Sie die Rayleighschen Quotienten

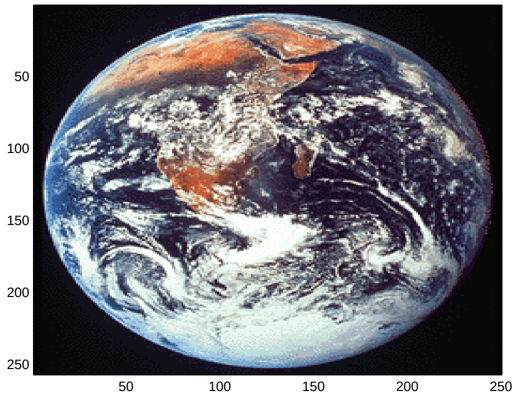
$$R_A(z) := \frac{z^* A z}{z^* z}, \; z \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\},$$

für die Iterierten $x^{(k)}$, $k = 0, 1, \dots, 10$.

c) Führen Sie eine geeignete Polverschiebung durch, so dass Sie am Ende sowohl den kleinsten als auch den großten Eigenwert bestimmt haben. Nutzen Sie hierfür die Ergebnisse aus a) und b).

Aufgabe 20

Entwickeln Sie in Matlab ein Programm, das nach dem Einlesen der Bilddaten eine Approximation vom Rang k dieser Matrix mit Rang $n \gg k$ durchführt. Berechnen Sie hierfür den Approximationsfehler in der 2–Norm (mit `norm`) und stellen Sie das Original sowie Ihre Approximation graphisch dar (mit `subplot`). Geben Sie zudem den benötigten Arbeitsspeicher sowohl für das komprimierte Bild als auch für das Original an.



Testen Sie Ihr Programm an dem in Matlab verfügbaren Bild `earth` für verschiedene k–Werte. Ermitteln Sie hierbei (heuristisch) die beste Kompression, so dass das Bild noch "verlustfrei" angezeigt wird.

Zum Einlesen des Bildes geben Sie

```
load earth;
```

ein. Dabei wird das Bild in der Matrix X gespeichert. Zur Ausgabe geben Sie

```
colormap(gray);
image(X);
```

ein.

Rang k Approximation einer Matrix:

Zerlegen Sie (z.B. mit Hilfe der Matlab–Funktion `svd`) die Matrix in unitäre Matrizen U und V sowie eine Diagonalmatrix S, so dass gilt:

$$X = U \cdot S \cdot V^\top$$

Letztere enthält nach der Zerlegung die Singulärwerte in absteigender Reihenfolge auf der Diagonalen. Eine Rang k Approximation bedeutet, dass die Matrix S nach der k–ten Spalte abgeschnitten wird.

Bonus: Die Funktion `svd` führt eine Singulärwertzerlegung für allgemeine $m \times n$ Matrizen durch. Ihr Programm kann somit leicht auf nicht quadratische Matrizen erweitert werden. Testen können Sie diese Erweiterung am Bild `clown` oder `durer`.