Jun.-Prof. Dr. K. Worthmann
Mathematisches Institut
Technische Universität Ilmenau

TECHNISCHE UNIVERSITÄT ILMENAU

Sommersemester 2014

Numerik für Informatiker
7.Übungsblatt

Aufgabe 21

Modelle zur Populationsdynamik greifen häufig auf eine Aufteilung der Population in Altersklassen zurück. Mit $x_i^{(j)}$ wird die Anzahl der Individuen in der i-ten Altersklasse ($i = 0, \ldots, n$) zum Zeitpunkt j ($j = 1, 2, 3, \ldots$) bezeichnet. Die Bevölkerungsentwicklung wird dann durch folgende Gleichung bestimmt:

$$x^{(j+1)} := \begin{pmatrix} x_0^{(j+1)} \\ \vdots \\ x_n^{(j+1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_0 & \cdots & F_{n-1} & F_n \\ T_1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & T_n & \end{pmatrix} x^{(j)} =: Ax^{(j)}.$$

Die erste Zeile beschreibt die Anzahl der Geburten in Abhängigkeit von altersgruppenspezifischen Geburtenraten F_i ($i = 0, \ldots, n$). Durch T_i ($i = 1, \ldots, n$) wird die Wahrscheinlichkeit beschrieben, dass ein Individuum der Altersgruppe $i-1$ überlebt und in die Gruppe i übertritt. Die Populationen X,Y,Z seien für $n = 2$ charakterisiert durch die Werte

$$\begin{array}{llllll} \text{X:} & F_0 = 0, & F_1 = 80, & F_2 = 50, & T_1 = 0.01, & T_2 = 0.4 \\ \text{Y:} & F_0 = 0, & F_1 = 80, & F_2 = 0, & T_1 = 0.6, & T_2 = 0.4 \\ \text{Z:} & F_0 = 0, & F_1 = 80, & F_2 = 0, & T_1 = 0.01, & T_2 = 0.4 \end{array}$$

Es sei vorausgesetzt, dass in jeder Altersgruppe mindestens ein Individuum existiert. Welche Population stirbt aus, welche ist stabil und welche explodiert? Warum?

Aufgabe 22

Zur Berechnung eines Eigenvektors v zu einem Eigenwert λ einer gegebenen Matrix A werde die inverse Vektoriteration

$$Az^{(i)} - \hat{\lambda} z^{(i)} = z^{(i-1)}$$

mit einer Näherung $\hat{\lambda}$ für den Eigenwert λ benutzt. Leiten Sie (ausschließlich!) aus der Beziehung

$$r(\delta) = Az^{(i)} - (\hat{\lambda} + \delta) z^{(i)} = z^{(i-1)} - \delta z^{(i)}$$

eine Korrektur δ für die Näherung $\hat{\lambda}$ so her, dass $\|r(\delta)\|_2^2$ minimal ist.

Hinweis: $\|r(\delta)\|_2^2 = r(\delta)^T r(\delta)$