

## Numerik für Informatiker

### 9. Übungsblatt

#### Aufgabe 26

Die Besselsche Funktion 0-ter Ordnung ist definiert durch

$$I_0(x) := \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos(x \sin t) dt .$$

- a)  $I_0(x)$  soll an äquidistanten Stützstellen mit der Schrittweite  $h$  tabelliert werden. Wie groß ist  $h$  zu wählen, wenn bei linearer Interpolation der Interpolationsfehler dem Betrag nach höchstens gleich  $10^{-6}$  ausfallen darf?
- b) Es sei  $(x_i)_{i \in \mathbb{N}_0}$  eine beliebige Folge voneinander verschiedener  $x$ -Werte aus dem Intervall  $[-1, 1]$ .  $P_n(x)$  sei das Polynom vom Grad  $\leq n$ , das  $I_0(x)$  an den Stellen  $x_i$  ( $i = 0, \dots, n$ ) interpoliert. Wie verhält sich der Interpolationsfehler

$$\max_{x \in [-1, 1]} |P_n(x) - I_0(x)|$$

für  $n \rightarrow \infty$ ?

#### Aufgabe 27

- (a) Es seien  $n + 1$  verschiedene Zahlen  $x_i$ ,  $i = 0, \dots, n$  und  $m + 1$  verschiedene Zahlen  $y_j$ ,  $j = 0, \dots, m$  gegeben. Zeigen Sie: Zu den  $(n+1)(m+1)$  reellen Zahlen  $f_{ij}$ ,  $i = 0, \dots, n$ ,  $j = 0, \dots, m$  gibt es ein eindeutig bestimmtes Polynom

$$P_{nm}(x, y) = \sum_{j=0}^m \sum_{i=0}^n a_{ij} x^i y^j$$

mit

$$P_{nm}(x_i, y_j) = f_{ij}, \quad i = 0, \dots, n, \quad j = 0, \dots, m.$$

- (b) Diskutieren Sie die Existenz und Eindeutigkeit von Polynomen  $P(x, y)$  der Grade  $\leq 1$  bzw.  $\leq 2$  mit

$$P(i, j) = \begin{cases} i + 2j, & \text{für } i, j \in \{0, 1\}, i + j < 2, \\ \alpha, & \text{für } i = j = 1, \end{cases}$$

in Abhängigkeit von  $\alpha \in \mathbb{R}$ . Unter dem Polynomgrad des Polynoms  $x^\nu y^\mu$  wird die Summe  $\nu + \mu$  verstanden.

### Aufgabe 28

Implementieren Sie den Algorithmus zur Berechnung und Auswertung eines Interpolationspolynoms mit baryzentrischen Koordinaten. Testen Sie Ihr Programm an den folgenden Beispielen

a) Dateninterpolation:

Die Werte der Wasserlinie des Vorschiffs der *Nieuw-Amsterdam* seien durch folgende Tabelle gegeben:

Wasserlinie	0.0	0.1	0.2	0.3	0.4	
Vorschiff	1.0	0.989	0.959	0.9002	0.8101	
Wasserlinie	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
Vorschiff	0.691	0.5491	0.395	0.243	0.1098	0.0



Berechnen Sie hierfür das Interpolationspolynom und die Auswertungen an den Stellen

$$x \in \{i \cdot 0.001 \mid i \in \{0, 1, \dots, 1000\}\}.$$

b) Funktionsinterpolation:

Gegeben seien folgende Stützstellen

$$(i) x_i = i, i \in \{0, 1, \dots, 7\} \quad (ii) x_i = \frac{i}{2}, i \in \{0, 1, \dots, 14\} \quad (iii) x_i = \frac{i}{9}, i \in \{0, 1, \dots, 64\}$$

und Funktionswerte  $f_i = \sin(x_i)$ . Berechnen Sie das Interpolationspolynom und werten Sie es an den Stellen  $x \in \{i \cdot 0.001 \mid i \in \{0, 1, \dots, 7000\}\}$  aus.

Veranschaulichen Sie alle Ihre Ergebnisse zudem graphisch, z.B. mit Matlab.