Jun.-Prof. Dr. K. Worthmann
Mathematisches Institut
Technische Universität Ilmenau

TECHNISCHE UNIVERSITÄT ILMENAU

Sommersemester 2014

Numerik für Informatiker
11.Übungsblatt

Aufgabe 31 :
Bestimmen Sie Werte für A, B und C, so dass die Integrationsformel

$$\int_0^2 f(x)dx \approx Af(0) + Bf(1) + Cf(2)$$

exakt ist für alle Polynome vom Grad $0, 1, 2, \ldots, n$. Dabei soll n maximal gewählt werden. Wie groß ist n?

Aufgabe 32 :
Bestimmen Sie das Gewicht c und die Knoten $x_0, x_1 \in [-h, h]$, so dass die Quadraturformel

$$\int_{-h}^h f(x)dx \approx c(f(x_0) + f(x_1))$$

für Polynome von höchstmöglichen Grad exakt wird. Geben Sie diesen Polynomgrad an!

Aufgabe 33 :
Man beweise die Simpson-Regel: Mit $h := \frac{b-a}{2}$ gilt für $f \in C^4([a, b])$

$$\left| \int_a^b f(t)\, dt - \frac{h}{3} [f(a) + 4f(a+h) + f(b)] \right| \leq \frac{h^5}{90} \|f^{(4)}\|_\infty$$

Aufgabe 34 :

1. Sei $n \in \mathbb{N}$ und $x_i = \frac{i}{n}$, $(i = 0, 1, \ldots, n)$. Sei $f \in C([0, 1])$ und konkav auf $[0, 1]$, d. h. für beliebiges $x_1, x_2 \in [0, 1]$, $\lambda \in [0, 1]$ ist

   $$\lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2) \leq f(\lambda x_1 + (1-\lambda) x_2)$$

   Dann ist

   $$I_n(f) := \frac{1}{2n} \left(f(0) + 2 \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) + f(1) \right) \leq \int_0^1 f(x)\, dx.$$

2. Man berechne nach a) eine untere Schranke für

   $$\int_0^1 \sin(x(1-x))dx$$

   mit $n = 5, 10, 20$.