

## Numerik für Informatiker

### 12.Übungsblatt

#### Aufgabe 35 :

Es ist

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx$$

zu berechnen. Beschränken Sie hierzu das Integrationsintervall mit Hilfe eines Parameters  $R$  und wenden Sie die Trapezregel zur Schrittweite  $h$  darauf an, d.h.

$$T_R(h) \approx \int_{-R}^R e^{-x^2} dx$$

Finden Sie ein Tupel  $(R, h)$ , so dass der durch diese Näherung entstandene Fehler kleiner als  $10^{-6}$  ist.

#### Aufgabe 36 :

Zeigen Sie, dass die Abbildung

$$g(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} \sin(x_1) + \cos(x_2) \\ \sin(x_1) - \cos(x_2) \end{pmatrix}$$

die Voraussetzungen des Banachschen Fixpunktsatzes auf

$$D = [\sqrt{2}, 2] \times [-1 + \frac{1}{2}\sqrt{2}, 1 - \frac{1}{2}\sqrt{2}]$$

bezüglich der Norm  $\|\cdot\|_{\infty}$  erfüllt. Berechnen Sie (z.B. mit Matlab oder Octave) einen Fixpunkt von  $g$  für den Startwert  $x_0 = (2, 0)^{\top}$ .

#### Aufgabe 37 :

Es sei  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  stetig differenzierbar und  $\hat{x}$  Fixpunkt von  $g$ . Zeigen Sie, dass  $\hat{x}$  bei geeigneter Wahl von  $x_0$  mit mindestens einem der folgenden Verfahren berechnet werden kann, falls  $g'(\hat{x}) \neq 1$  gilt.

- (i)  $x_{k+1} = g(x_k)$ ,
- (ii)  $x_{k+1} = g^{-1}(x_k)$ ,
- (iii)  $x_{k+1} = (x_k + g(x_k))/2$ .

**Aufgabe 38 :**

$\Phi : D \rightarrow D$ ,  $D \subseteq \mathbb{R}^n$ , sei eine kontrahierende Abbildung mit dem Fixpunkt  $\xi$  und der Kontraktionskonstanten  $k \in [0, 1)$ . Sei weiter  $\tilde{\Phi} : D \rightarrow D$  eine Funktion mit  $\|\tilde{\Phi}(x) - \Phi(x)\| < \varepsilon$  für alle  $x \in D$ . Zeigen Sie, dass für die Folgen

$$\begin{aligned}x_0 &= \tilde{x}_0 \in D, \\x_{i+1} &= \Phi(x_i), \quad i \geq 0 \\ \tilde{x}_{i+1} &= \tilde{\Phi}(\tilde{x}_i) : \end{aligned}$$

a)  $\|x_m - \tilde{x}_m\| \leq \varepsilon(1 + k + \dots + k^{m-1})$

b)  $\|\xi - \tilde{x}_m\| \leq \frac{1}{1-k}(k^m \|x_0 - x_1\| + \varepsilon(1 - k^m)) \leq \frac{1}{1-k}(k^m \|x_0 - \tilde{x}_1\| + \varepsilon)$

gilt.