Jun.-Prof. Dr. K. Worthmann
Mathematisches Institut
Technische Universität Ilmenau

Sommersemester 2014

Numerik für Informatiker
12.Übungsblatt

Aufgabe 35 :
Es ist

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,dx$$

zu berechnen. Beschränken Sie hierzu das Integrationsintervall mit Hilfe eines Parameters R und wenden Sie die Trapezregel zur Schrittweite h darauf an, d.h.

$$T_R(h) \approx \int_{-R}^{R} e^{-x^2}\,dx$$

Finden Sie ein Tupel (R, h), so dass der durch diese Näherung entstandene Fehler kleiner als 10^{-6} ist.

Lösung:

$$\left|\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}dx - \int_{-R}^{R} e^{-x^2}dx\right| = 2\int_{R}^{\infty} e^{-x^2}dx \overset{x=\sqrt{t},dx=\frac{1}{2\sqrt{t}}dt}{=} \int_{R^2}^{\infty} e^{-t}\frac{1}{\sqrt{t}}dt \leq \frac{1}{R}\int_{R^2}^{\infty} e^{-t}dt = \frac{1}{R}e^{-R^2}$$

liefert eine Fehlerabschätzung, wenn im Intervall $[-R, R]$ integriert wird.
$\int\limits_{-R}^{R} f(x)dx$ mit $f(x) = e^{-x^2}$ wird mit Trapzeregel $T(h)$ approximiert. Fehlerabschätzung liefert:
$\int\limits_{-R}^{R} f(x)dx = T_R(h) - \frac{R-(-R)}{12}h^2 f''(\xi)$ mit $\xi \in (-R, R)$.

$$\begin{aligned} f'(x) &= -2xe^{-x^2} \\ f''(x) &= 4x^2e^{-x^2} - 2e^{-x^2} = 2e^{-x^2}(2x^2-1) \end{aligned}$$

Beh.: $|f''(x)| \leq 2$, $\forall x \in \mathbb{R}$.
Bew.: Sei $g(x) = f''(x) = 2e^{-x^2}(2x^2-1)$
$\Longrightarrow g'(x) = -4xe^{-x^2}(2x^2-1) + 8xe^{-x^2} = 4xe^{-x^2}(3-2x^2) \overset{!}{=} 0 \Longleftrightarrow x = 0$ oder $x = \pm\sqrt{\frac{3}{2}}$.
$g(0) = -2$, $g(\pm\sqrt{\frac{3}{2}}) = 4e^{-\frac{3}{2}} \approx 0.89$
$g(x) \to 0$ für $x \to \pm\infty$

$\left|\int\limits_{-R}^{R} f(x)dx - T_R(h)\right| \leq \left|\frac{2R}{12}h^2 2\right| = \frac{Rh^2}{3}$

$$\begin{aligned}
\Longrightarrow \left|\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}dx - T_R(h)\right| &\leq \left|\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}dx - \int_{-R}^{R} e^{-x^2}dx\right| + \left|\int_{-R}^{R} e^{-x^2}dx - T_R(h)\right| \\
&\leq \frac{1}{R}e^{-R^2} + \frac{Rh^2}{3} \overset{!}{\leq} 10^{-6} \\
\Longleftrightarrow h^2 &\leq \frac{3}{R}\left(10^{-6} - \frac{1}{R}e^{-R^2}\right)
\end{aligned}$$

Dabei muss die rechte Seite > 0 sein, d. h. $\frac{1}{R}e^{-R^2} < 10^{-6}$.
„$= 0$“ für $R = 3.342686172...$(MAPLE).
Für $R \geq 3.6$ auf jedem Fall möglich: $h = \sqrt{\frac{3}{R}\left(10^{-6} - \frac{1}{R}e^{-R^2}\right)}$
(schwächere Abschätzung für

$$\left|\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}dx - \int_{-R}^{R} e^{-x^2}dx\right| = 2\int_{R}^{\infty} e^{-x^2}dx \overset{R\geq 1}{\leq} 2\int_{R}^{\infty} e^{-x}dx \leq 2\left[-e^{-x}\right]_R^{\infty} = 2e^{-R}$$

liefert $h^2 \leq \frac{3}{R}\left(10^{-6} - 2e^{-R}\right)$.
Problem: Bedingung an rechte Seite: $10^{-6} - 2e^{-R} > 0$ erst für $R > -\ln\left(\frac{10^{-6}}{2}\right) \approx 14.51$ erfüllt
$\Longrightarrow h = \sqrt{\frac{3}{R}\left(10^{-6} - 2e^{-R}\right)}$.
SW jedoch für $R \geq 15$ ziemlich identisch, da der Einfluss von $2e^{-R}$ bzw. $\frac{1}{R}e^{-R^2}$ für so große R gegenüber 10^{-6} vernachlässigbar ist.
Anmerkung: $\left|\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}dx\right| = \sqrt{\pi}$
wichtig: Vergrößerung von R hat größten Einfluss. Verkleinerung von h nur sehr wenig. Z. B. $R = 4$ und $h = 8 \cdot 10^{-4}$ liefert auch die gewünschte Genauigkeit.

R	h
4	8.78e-04
6	7.07e-04
8	6.12e-04
10	5.48e-04
15	4.74e-04
20	3.87e-04
30	3.16e-04
50	2.45e-04

Aufgabe 36 :
Zeigen Sie, dass die Abbildung

$$g(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} \sin(x_1) + \cos(x_2) \\ \sin(x_1) - \cos(x_2) \end{pmatrix}$$

die Voraussetzungen des Banachschen Fixpunktsatzes auf

$$D = [\sqrt{2}, 2] \times [-1 + \frac{1}{2}\sqrt{2}, 1 - \frac{1}{2}\sqrt{2}]$$

bezüglich der Norm $\|\cdot\|_\infty$ erfüllt. Berechnen Sie (z.B. mit Matlab oder Octave) einen Fixpunkt von g für den Startwert $x_0 = (2, 0)^\top$.

Lösung: Es gilt

$$\begin{aligned} \|g(x) - g(y)\|_\infty &= \max\{|\sin(x_1) - \sin(y_1) + \cos(x_2) - \cos(y_2)|, \\ &\qquad |\sin(x_1) - \sin(y_1) - \cos(x_2) + \cos(y_2)|\} \\ &\leq \max\{|\sin(x_1) - \sin(y_1)| + |\cos(x_2) - \cos(y_2)|, \\ &\qquad |\sin(x_1) - \sin(y_1)| + |\cos(x_2) - \cos(y_2)|\} \\ &= |\sin(x_1) - \sin(y_1)| + |\cos(x_2) - \cos(y_2)|. \end{aligned}$$

Sei $I_1 = [\sqrt{2}, 2]$, $I_2 = [-1 + \frac{1}{2}\sqrt{2}, 1 - \frac{1}{2}\sqrt{2}]$. Dann folgt für $x, y \in I_1 \times I_2$ mit Hilfe des Mittelwertsatzes

$$\begin{aligned} |\sin(x_1) - \sin(y_1)| &\leq \max_{\xi \in I_1} |\cos(\xi)| \cdot |x_1 - y_1| \leq |\cos(2)| \cdot \|x - y\|_\infty, \\ |\cos(x_2) - \sin(y_2)| &\leq \max_{\xi \in I_2} |\sin(\xi)| \cdot |x_2 - y_2| \leq \sin(1 - \frac{1}{2}\sqrt{2}) \cdot \|x - y\|_\infty. \end{aligned}$$

Also:

$$\begin{aligned} \|g(x) - g(y)\|_\infty &\leq \left(|\cos(2)| + \sin(1 - \frac{1}{2}\sqrt{2})\right) \cdot \|x - y\|_\infty \\ &\approx \underbrace{(0.4161468365 + 0.2887234338)}_{=0.7048702703} \cdot \|x - y\|_\infty. \end{aligned}$$

Dies ist die Kontraktionsbedingung mit $k = |\cos(2)| + \sin(1 - \frac{1}{2}\sqrt{2}) \approx 0.7048702703$. Zu zeigen bleibt noch die Selbstabbildungseigenschaft. Sei $x_1 \in I_1$ und $x_2 \in I_2$. Dann gilt

$$\sqrt{2} \leq \underbrace{\sin(2) + \cos(1 - \frac{\sqrt{2}}{2})}_{\approx 1.866709970} \leq \sin(x_1) + \cos(x_2) \leq 1 + 1 = 2$$

und

$$-1 + \frac{\sqrt{2}}{2} \leq \underbrace{\sin(2) - 1}_{\approx -0.090702573} \leq \sin(x_1) - \cos(x_2) \leq 1 - \cos(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}) \leq 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Also $g(D) \subset D$. Damit sind alle Voraussetzungen des Banachschen Fixpunktsatzes erfüllt und die Fixpunktiteration konvergiert. Speziell ergeben sich für $x^{(0)} = (2,0)^\top$ die folgenden Werte:

i	$x_1^{(i)}$	$x_2^{(i)}$
0	2.000000000	0.0
1	1.909297427	$-.0907025732$
2	1.939142811	$-.0526358710$
3	1.931539060	$-.0656910447$
4	1.933478039	$-.0622081993$
5	1.933014455	$-.0631169325$
6	1.933121920	$-.0628956550$
7	1.933097767	$-.0629476732$
8	1.933103057	$-.0629358415$
9	1.933101926	$-.0629384607$
10	1.933102162	$-.0629378951$
11	1.933102114	$-.0629380144$
12	1.933102124	$-.0629379898$
13	1.933102122	$-.0629379949$
14	1.933102122	$-.0629379939$
15	1.933102122	$-.0629379940$