Jun.-Prof. Dr. K. Worthmann
Mathematisches Institut
Technische Universität Ilmenau

TECHNISCHE UNIVERSITÄT ILMENAU

Sommersemester 2014

Numerik für Informatiker
13.Übungsblatt

Aufgabe 39 :
Gegeben sei die Integralgleichung

$$y(x) = c + \int_0^x t(1 + y(t))dt$$

für die gesuchte Funktion $y : [0, 1] \to \mathbb{R}$.

(a) Durch Definition des Operators

$$(Ty)(x) := c + \int_0^x t(1 + y(t))dt$$

für stetige Funktionen y kann die Integralgleichung als Fixpunktgleichung $y(x) = (Ty)(x)$ geschrieben werden. Zeigen Sie mit Hilfe des Banachschen Fixpunktsatzes, dass die Fixpunktgleichung genau eine Lösung besitzt. Benutzen Sie dabei, dass der Raum $\mathcal{C}([0, 1])$ der auf $[0, 1]$ stetigen Funktionen versehen mit der Norm

$$\|f\|_\infty := \max_{x\in[0,1]} |f(x)|$$

vollständig ist.

(b) Berechnen Sie die Lösung $y(x) = \lim_{i\to\infty} y_i(x)$ der Integralgleichung durch die Fixpunktiteration

$$y_{i+1}(x) = (Ty_i)(x), \qquad i = 0, 1, 2, \ldots$$

beginnend mit $y_0(x) = c$.

Aufgabe 40 :
Es sei eine gegen x^* konvergente Iterationsfolge $(x^i)_{i\in\mathbf{N}}$ gegeben. Die Folge heißt linear konvergent gegen x^*, falls es eine Konstante $0 \leq C_1 < 1$ mit

$$\|x^{i+1} - x^*\| \leq C_1 \, \|x^i - x^*\| \quad (\forall i \in \mathbb{N})$$

gibt. Sie heißt quadratisch konvergent gegen x^*, falls es eine Konstante $C_2 \geq 0$ gibt mit

$$\|x^{i+1} - x^*\| \leq C_2 \, \|x^i - x^*\|^2 \quad (\forall i \in \mathbb{N}).$$

Für die Näherung x^k gelte $\|x^k - x^*\| = \varepsilon_0 < 1$. Wie viele Iterationen müssen noch durchgeführt werden, um die Genauigkeit $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ zu erreichen, wenn die Folge linear konvergent mit $0 < C_1 < 1$ bzw. quadratisch konvergent mit $0 < C_2 \cdot \varepsilon_0 < 1$ ist? Geben Sie für $C_1 = C_2 = 1/2$, $\varepsilon_0 = 10^{-3}$ und $\varepsilon = 10^{-9}$ Zahlenwerte an.

Aufgabe 41 :
Zur Bestimmung eines Eigenwertes λ und eines zugehörigen Eigenvektors x der Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $\|x\|_2 = 1$, soll das Newton-Verfahren verwendet werden. Definieren Sie eine geeignete Abbildung $F : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}^{n+1}$, die in $y := (x, \lambda)^\top$ eine Nullstelle besitzt, und bestimmen Sie deren Ableitung $F'(y)$.