Jun.-Prof. Dr. K. Worthmann
Mathematisches Institut
Technische Universität Ilmenau

TECHNISCHE UNIVERSITÄT ILMENAU
Sommersemester 2014

Numerik für Informatiker
13.Übungsblatt

Aufgabe 40 :
Es sei eine gegen x^* konvergente Iterationsfolge $(x^i)_{i\in\mathbf{N}}$ gegeben. Die Folge heißt linear konvergent gegen x^*, falls es eine Konstante $0 \le C_1 < 1$ mit

$$\|x^{i+1} - x^*\| \le C_1 \, \|x^i - x^*\| \quad (\forall i \in \mathbb{N})$$

gibt. Sie heißt quadratisch konvergent gegen x^*, falls es eine Konstante $C_2 \ge 0$ gibt mit

$$\|x^{i+1} - x^*\| \le C_2 \, \|x^i - x^*\|^2 \quad (\forall i \in \mathbb{N}).$$

Für die Näherung x^k gelte $\|x^k - x^*\| = \varepsilon_0 < 1$. Wie viele Iterationen müssen noch durchgeführt werden, um die Genauigkeit $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ zu erreichen, wenn die Folge linear konvergent mit $0 < C_1 < 1$ bzw. quadratisch konvergent mit $0 < C_2 \cdot \varepsilon_0 < 1$ ist? Geben Sie für $C_1 = C_2 = 1/2$, $\varepsilon_0 = 10^{-3}$ und $\varepsilon = 10^{-9}$ Zahlenwerte an.

Lösung:
Lineare Konvergenz: Es gelte

$$|x^{i+1} - x^*| \le C_1 |x^i - x^*|, \quad 0 < C_1 < 1.$$

O.B.d.A. sei $k = 0$, d.h. $|x^0 - x^*| = \varepsilon_0$. Es gilt $|x^1 - x^*| \le C_1 |x^0 - x^*| = C_1 \varepsilon_0$ und induktiv folgt

$$|x^k - x^*| \le C_1^k |x^0 - x^*| = C_1^k \varepsilon_0.$$

Wann gilt

$$|x^k - x^*| \le C_1^k \varepsilon_0 \le \varepsilon \ ?$$

Die rechte Ungleichung ist erfüllt, wenn

$$C_1^k = \exp(k \ln(C_1)) \le \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} \qquad \Leftrightarrow \qquad k \ge \frac{\ln\left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}\right)}{\ln(C_1)}$$

Zahlenwerte: $C_1 = 1/2, \varepsilon_0 = 10^{-3}, \varepsilon = 10^{-9}$ liefert

$$k \ge \frac{\ln\left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}\right)}{\ln(C_1)} \approx 19.931\ldots$$

Nach spätestens 20 Iterationen ist die Genauigkeit erreicht.
Quadratische Konvergenz: Es gelte

$$|x^{i+1} - x^*| \le C_2 |x^i - x^*|^2, \quad C_2 > 0.$$

O.B.d.A. sei $k = 0$, d.h. $|x^0 - x^*| = \varepsilon_0$. Es gilt $|x^1 - x^*| \leq C_2 |x^0 - x^*|^2 = C_2 \cdot \varepsilon_0^2$ und induktiv folgt

$$\begin{aligned} |x^2 - x^*| &\leq C_2 |x^1 - x^*|^2 \leq C_2^3 \cdot \varepsilon_0^4, \\ |x^3 - x^*| &\leq C_2 |x^2 - x^*|^2 \leq C_2^7 \cdot \varepsilon_0^8, \\ &\vdots \\ |x^k - x^*| &\leq \frac{(C_2 \cdot \varepsilon_0)^{2^k}}{C_2}. \end{aligned}$$

Wann gilt

$$|x^k - x^*| \leq \frac{(C_2 \cdot \varepsilon_0)^{2^k}}{C_2} \leq \varepsilon \ ?$$

Die rechte Ungleichung ist erfüllt, wenn

$$(C_2 \cdot \varepsilon_0)^{2^k} = \exp(2^k \cdot \ln(C_2 \cdot \varepsilon_0)) \leq C_2 \cdot \varepsilon \quad \Leftrightarrow \quad 2^k \cdot \ln(C_2 \cdot \varepsilon_0) \leq \ln(C_2 \cdot \varepsilon).$$

Unter der Annahme, dass $C_2 \cdot \varepsilon_0 < 1$ gilt, folgt wegen $2^k = \exp(k \ln(2))$ die Beziehung

$$k \geq \frac{\ln\left(\frac{\ln(C_2 \cdot \varepsilon)}{\ln(C_2 \cdot \varepsilon_0)}\right)}{\ln(2)}.$$

Zahlenwerte: $C_2 = 1/2, \varepsilon_0 = 10^{-3}, \varepsilon = 10^{-9}$ liefert

$$k \geq \frac{\ln\left(\frac{\ln(C_2 \cdot \varepsilon)}{\ln(C_2 \cdot \varepsilon_0)}\right)}{\ln(2)} \approx 1.494\ldots$$

Nach spätestens 2 Iterationen ist die Genauigkeit erreicht.